**CLAEH UNIVERSIDAD**

**Programa de Educación**

**Maestría en Didáctica de la Educación Superior**

# Escribir en Matemática

***¿Qué escriben los estudiantes magisteriales en clase de Matemática?***

**Tesista: Carla Cristina Damisa Casas**

**Tutor: Mag. Julia Leymonié**

Montevideo, Uruguay

Octubre 2017

*Nos aventuramos a decir que la escritura es formativa*
*porque devela, significa, abre sentidos,*
*porque desenlaza procesos reflexivos y expresivos*
*que a abarcan significados conscientes e inconscientes.*
*Souto, M.*


## Agradecimientos

*A Julia Leymonié por acompañarme en el proceso con dedicación y generosidad.*
*A los estudiantes de los cursos de Matemática I y II de los IINN que ofrecieron sus escrituras para este estudio.*
*A las profesoras Laura Dodino e Inés Piedra Cueva por sus aportes.*
*A Joaquín, Leticia y Sergio por su apoyo incondicional.*

# Resumen

*El presente estudio tiene por objetivo analizar la escritura en clase de matemática que producen estudiantes de dos grupos de las asignaturas Matemática I y II de los Institutos Normales de Montevideo, María Stagnero de Munar y Joaquín R. Sanchez (IINN), al enfrentarse a la resolución de situaciones que exigen fundamentación matemática. Es un estudio de caso, de carácter exploratorio, con rasgos de teoría fundamentada. Recoge, identifica, describe y caracteriza la producción de escritura matemática. El proceso de análisis de las escrituras de los estudiantes tiene como fin encontrar regularidades en ellas desde su función epistémica. Este análisis se apoya en los aportes de R. Duval (1993, 1995, 2006), P. Carlino (2003, 2004, 2015), "El movimiento escribir" en todas las asignaturas y en N. Balacheff (2000), entre otros. Las escrituras analizadas serán las que generan los estudiantes durante el proceso de resolución de una actividad matemática que exige fundamentación. La situación matemática propuesta es de validación y de contexto aritmético/algebraico enmarcada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007). El análisis de las escrituras tiene como propósito producir conocimiento que ayude en futuras acciones de aula a enseñar matemática a través de su escritura.*

**Palabras claves:** *escribir en matemática, fundamentaciones matemáticas, análisis de las escrituras.*

# Abstract

*The aim of this study is to analyze the writing developed by two groups of students of the subjects Mathematics I and II from the Institutos Normales de Montevideo, María Stagnero de Munar y Joaquín R. Sanchez (IINN), when facing situations that demand mathematical fundaments. This case study, exploratory in nature with features of grounded theory, collects, identifies, describes and characterizes the written production in mathematics. The purpose of the analysis of the students' writings is to find regularities among them in their epistemic function. The analysis is based on the work of R. Duval (1993, 1995, 2006), P Carlino (2003, 2004, 2015), Writing Across the Curriculum and N. Balacheff (2000), among others. The analyzed pieces of writing will be generated by the students while solving a mathematical task that requires fundamentals application. The mathematical task will be of validation and of arithmetic/algebraic context framed in Brouseasu's "Teoría de las Situaciones Didácticas" (2007). The present study will also generate insights to help the development of strategies to teach mathematics through its writing.*



**Key Words:** writing mathematics*, mathematical fundamentals, written speach analysis*.

# Índice

# Lista de cuadros

## Cuadros

# Lista de figuras

## Figuras

# Introducción

Hace ya algunos años que existe interés por el estudio de la escritura en las disciplinas y en particular esta investigación se centra en la escritura en clase de Matemática. A su vez, cuando la escritura que se analiza es producida por futuros docentes, toma relevancia diferente. Se ha evidenciado que en general los docentes consideran la escritura de la disciplina solamente en tareas de evaluación, sin prestar atención a otras tareas donde se produce escritura Matemática. Además cuando la actividad Matemática de los estudiantes exige validación, allí la dificultad para escribir y comunicar las razones de esa resolución se hace aún mayor.

Se considera sustantivo que la escritura en su función epistémica produce aprendizajes y que describir, analizar y categorizar dichas escrituras produce conocimientos nuevos para la enseñanza de la Matemática. Contar con cierta información sobre la escritura en Matemática podría dar pistas de como conducirse en clase con el fin de que en las aulas se produzcan escrituras para revisar lo hecho y/o engrosar las ideas y relaciones matemáticas ya adquiridas, y a su vez construir nuevas.

Es así que el presente estudio tiene por objetivo analizar la escritura en clase de matemática que producen estudiantes de dos grupos de las asignaturas Matemática I y II de los Institutos Normales de Montevideo, María Stagnero de Munar y Joaquín R. Sanchez (IINN), al enfrentarse a la resolución de situaciones que exigen fundamentación matemática.

La pregunta que guía esta investigación es: *¿Qué características tiene la escritura en Matemática de los estudiantes magisteriales al resolver actividades que exigen fundamentar?* Para responder dicha pregunta se propuso el siguiente objetivo general: *Analizar las escrituras que usan los estudiantes de los IINN de Montevideo al resolver situaciones que exigen fundamentar matemáticamente.*

Esta investigación es un estudio de caso, exploratoria, con algunos elementos de teoría fundamentada. Recoge, identifica, describe y caracteriza la producción de escritura en matemática. El proceso de análisis de las escrituras de los estudiantes tiene como fin encontrar en ellas regularidades desde su función epistémica.

En Matemática, como se sabe, los objetos de estudio son ideales y por tanto se hace indispensable el uso de distintos registros de representaciones semióticas a la hora de enseñarla y aprenderla. Tanto el docente en su tarea de enseñanza como el estudiante en su rol de aprendiz necesitan cargar de sentido esos registros y no confundirlos con los propios objetos de enseñanza. La escritura podría estar funcionando como una herramienta esencial a la hora de la construcción de significado de esos objetos. Este análisis se apoya en los aportes de R. Duval (1993, 1995, 2006), P. Carlino (2003, 2004, 2015), "El movimiento escribir en todas las asignaturas" y en N. Balacheff (2000), entre otros.

Las escrituras que se recogen y analizan son aquellas que generan los estudiantes durante el proceso de resolución de una actividad matemática que exige fundamentación. La actividad será de validación y de contexto aritmético/algebraico enmarcada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007). El análisis de las escrituras tendrá como propósito producir conocimiento que ayude en futuras acciones de aula a enseñar matemática a través de su escritura.

En el **capítulo 1** se define, justifica y fundamenta el problema de investigación. Se detallan los insumos que este estudio pretende arrojar en relación a la escritura en Matemática con el fin de considerarlos en las aulas de Matemática.

El **capítulo 2** aborda la presentación de investigaciones en relación al objeto de estudio. Los autores a los que se hace referencia aquí se vinculan en tres aspectos con esta investigación en relación a: los registros de representación, la producción de pruebas matemáticas y a la escritura en Matemática. Por otro lado, se presenta también, una experiencia de Formación en Servicio de Maestros.

En el **capítulo 3** se presenta el marco teórico de referencia. Se recorren los autores utilizados para este estudio. Se toman cuatro dimensiones donde se especifican los autores en relación a: la escritura, a los registros de representación, a la producción de diferentes tipos de prueba en Matemática y a la perspectiva Didáctica.

El **capítulo 4** aborda la metodología utilizada en la investigación. Se desarrolla detalladamente la información sobre el tipo de diseño y el alcance de la investigación. Se presenta y define la unidad de análisis, también sus dimensiones y los indicadores que las mismas pueden tomar en el marco de este estudio. También se exponen las condiciones bajo las cuales se desarrolló el estudio y los criterios de selección de la población, así como los métodos de recolección de información, la construcción de los datos, y el proceso por el cual se asegura la calidad, credibilidad y confiabilidad de la investigación.

El análisis de la información se presenta en el **capítulo 5** donde se describe, analiza y categoriza fundadamente la información recogida. Desde allí se construye una nueva categoría con el fin de poder caracterizar algunas producciones escritas encontradas. También se presenta la información obtenida a partir de las auditorías interna y externa que se llevaron a cabo.

El **capítulo 6** está destinado a las conclusiones de este estudio y las nuevas preguntas que generó. En él se detallan las conclusiones a las que se fue arribando y fundamentando durante el proceso de análisis utilizando el marco teórico de referencia.

En el apéndice se presenta el análisis didáctico a priori, en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, del problema presentado a los estudiantes. Éste fue el instrumento con el que se recogió la información.

# 1. Definición, fundamentación y justificación

En este capítulo se define, se fundamenta y justifica el problema de investigación. Para ello en algunos momentos se establecen vinculaciones con los autores de referencia, lo que se pretende en términos de objetivos y las posibles consecuencias de este estudio.

El objetivo de este estudio es analizar los tipos y cambios de registros de representación semiótica que usan los estudiantes al producir una escritura matemática donde se evidencian pruebas matemáticas. Se asume el término *prueba* en términos de Balacheff (2000). Para el autor el concepto de prueba está asociado a un proceso social donde se transforma una explicación en prueba. Esa transformación está dada cuando dicha explicación es aceptada por una comunidad en un momento dado. Para este estudio la comunidad es el aula.

**La pregunta que guía esta investigación:**

*¿Qué características tiene la escritura en Matemática de los estudiantes magisteriales al resolver actividades que exigen fundamentar?*

La descripción y el análisis de esas escrituras matemáticas se realizó utilizando las categorías de registros de representaciones semióticas de Duval (2006, 2011) y los tipos de pruebas producidas por los estudiantes de acuerdo a Balacheff (2000).

En la formación inicial de maestros el análisis del resultado de esas escrituras podrá proveer insumos para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a través de lo que muestran esas marcas. Se espera que los insumos que pueda aportar este estudio atiendan los procesos de producción de conocimiento matemático en las aulas de formación docente a través de la escritura en matemática.

Se considera la escritura matemática como una herramienta esencialmente semiótica, en ese sentido este estudio se centra en su función epistémica (Carlino, 2004a) con el fin de establecer relaciones con el aprendizaje matemático.

De igual manera el problema de estudio elegido podrá realizar aportes a varios niveles:

1) Contar con los registros que los estudiantes eligen para escribir las pruebas que producen.

2) Disponer de información sustantiva para el análisis sobre producción de fundamentaciones matemáticas en la formación inicial de maestros.

3) Contar con insumos para la planificación de tareas matemáticas en relación al objeto estudiado (escribir en matemática).

4) Orientar el trabajo docente en relación a la escritura en matemática al acceder a producciones categorizadas.

En relación al último punto la producción de textos matemáticos no siempre es considerada un aspecto de enseñanza. En este caso los insumos que se recogen en relación a la escritura matemática podrán ofrecer conocimientos nuevos sobre las tensiones que se producen entre *lo que se piensa, lo que se escribe y cómo se escribe*.

Estas tensiones hablan de una forma de pensar desde la complejidad (Morin, 2007). Es así que el conocimiento se concibe de manera no dada, sino construida desde una cierta subjetividad, recorriendo un trayecto de manera no lineal. Souto (2011) sostiene que el conocimiento es representación de lo real, es una construcción que el sujeto hace de la realidad. En ese sentido se puede apreciar que las tensiones entre lo que se piensa, lo que se escribe y cómo se escribe, se traducen en el texto matemático producido.

De este modo la relación sujeto- objeto de conocimiento presenta una relación intrínseca, no separada. Es así que la influencia del sujeto sobre el texto producido es indisoluble. El texto que sea capaz de producir cada estudiante dependerá de sus vivencias, su trayectoria de aprendizaje, su relación con la matemática y en particular con la escritura en matemática.

Asimismo, desde esta perspectiva, separar el texto solamente para estudiarlo sin tener en cuenta quien lo produjo y las condiciones en las que se produjo no tiene sentido. Como consecuencia de ello se analiza un texto producido por los estudiantes en el aula al resolver, validar y comunicar un problema de corte aritmético- algebraico. Igualmente el escrito producido es situado y por lo tanto las tensiones entre lo pensado, lo que realmente el estudiante logra exteriorizar y cómo lo hace, se puede valorar a través del análisis de lo escrito y de entrevistas realizadas a ellos.

Una de las funciones de escribir es la función epistémica, es decir que el sujeto que escribe produce un conocimiento nuevo o mejora el que ya se posee (Carlino, 2004b). A veces se revisa lo que se sabe, se lo organiza de otro modo, se establecen nuevas relaciones y se conecta con otros aspectos que hasta el momento no se había concebido. En el marco teórico y estado del arte se profundizará este aspecto.

Durante la escritura de un texto, se van generando nuevos órdenes en el desorden, Souto (2011). Estos nuevos órdenes son conocimiento nuevo en el campo en el que se está trabajando. Poner el foco en el análisis de la escritura matemática en la formación inicial de maestros permitirá producir conocimiento nuevo a partir del planteamiento anterior, en relación a:

- Escribir en matemática.
- Producir textos matemáticos.
- Caracterizar los tipos de registros usados por los estudiantes en esos textos.
- Explicitar las distintas funciones de la escritura matemática en los textos producidos.
- Analizar el proceso de producción de pruebas matemáticas a través de lo que los estudiantes escriben.

Para llevar a cabo lo anteriormente explicitado es que se propone el siguiente objetivo general con sus correspondientes objetivos específicos.

## Objetivos generales y específicos

### Objetivo general

***Analizar las escrituras que usan los estudiantes de los IINN de Montevideo al resolver situaciones que exigen fundamentar matemáticamente.***

### Objetivos específicos

- Identificar los registros de representación que los estudiantes magisteriales utilizan al escribir cuando producen pruebas matemáticas.

- Describir y categorizar los registros encontrados.

- Relacionar esos registros, a dos niveles: en un mismo estudiante y en el colectivo de estudiantes.

- Comparar los registros de representación y los tipos de pruebas usados.

El desarrollo de las ideas que se han planteado en este capítulo, la descripción del proceso seguido, el análisis de la información recogida, las categorías y las conclusiones a las que se arriban en este estudio se profundizarán en los próximos capítulos.

# 2. Estado del Arte

Este capítulo aborda la presentación de investigaciones en relación al objeto de estudio. Los autores a los que se hace referencia aquí se vinculan en tres aspectos con esta investigación en relación a: los registros de representación, la producción de pruebas matemáticas y a la escritura en Matemática. Por otro lado, se presenta también, una experiencia de Formación de Maestros en Servicio.

## 2.1- En relación con los registros de representación

Hitt (2000) en su estudio, "El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática", plantea la necesidad de coordinar varias formas de registros de representación de un mismo objeto matemático con el fin de que se produzca una conceptualización del mismo. Se apoya en Duval (1996) cuando señala que las representaciones de los objetos son parciales y por eso es necesario trabajar y conocer varias representaciones, pues todas muestran propiedades distintas del objeto de estudio que se complementan. En su caso, el objeto de estudio fue la articulación de los registros de representación en relación al concepto de función.

En las concluciones de su estudio, Hitt (2000) alude a que, basándose en el trabajo de Duval (1995, 1996), la construcción de un concepto se apoya en la necesidad de articular distintos registros de represenatción. Y sostiene que en el caso de la construcción del concepto de función, es necesario que entren en juego el registro de representación de la lengua natural, el de las expresiones algebraicas, tabulares, gráficas y figurales.

Para esta investigación se toma como un punto de apoyo la constatación de la necesidad de articular algunos registros para conceptualizar una noción matemática. Además como en esta investigación, los estudiantes deben producir un texto escrito, necesitan elegir algún tipo de registro de representación y en ese sentido es que se analizarán las transformaciones que se den entre esos registros cuando resuelven el problema. Por otro lado la exigencia de usar esos registros tiene relación con la convocatoria en la actividad a fundamentar porqué escriben lo que escriben.

En los estudios realizados por Sadosvsky (2005), citando a algunos autores (Bosch, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; Duval, 1995), explicita que las transformaciones que se realizan con las representaciones semióticas cumplen una función en la producción de nuevas relaciones y de nuevas significaciones para relaciones ya conocidas. Un ejemplo de lo planteado por estos autores lo presenta y analiza Rojas (2012) en su tesis doctoral, donde investiga la articulación y los cambios de sentido.

El autor propone a un grupo de estudiantes de 9° y 11° grado que vinculen algunas expresiones. Estas expresiones son *"3n" y "(n-1) + n + (n+1)"*. Si se analizan, a pesar de que son expresiones distintas, se concluye que representan un mismo objeto matemático: "los múltiplos de 3". Esta última proposición equivaldría a la posibilidad de producir nuevas relaciones a partir de las dadas en el sentido que lo plantea Sadosvky (2005) y Panizza (2003). Asimismo, Rojas en sus conclusiones presenta evidencias sobre la dificultad de la articulación de sentido en las respuestas de los alumnos y los asocia a tres hechos fundamentales. Estos son:

1) aunque los estudiantes "manejen" las propiedades básicas de trabajo aritmético y algebraico para realizar las transformaciones de tratamiento y conversión en expresiones equivalentes no cargan de sentido dichas expresiones,

2) los estudiantes siguen "anclados" al contexto en que se presentó el problema y no logran "despegarse" del mismo, y

3) la mirada básicamente icónica de las expresiones algebraicas.

Además, presenta una conclusión general que responde a la aceptación acrítica de las respuestas que los estudiantes ofrecen. La ausencia de validación a la respuesta ofrecida por los estudiantes, es lo que el autor considera como una respuesta acrítica.

Las conclusiones ofrecidas por Rojas (2012) son base para este estudio pues uno de los centros de atención es la producción de explicaciones por parte de los estudiantes al resolver un problema de corte aritmético-algebraico. Esto quiere decir que los estudiantes que participan de esta investigación para resolver el problema necesitarán articular algunos registros, al menos dos al decir de Duval (2006), y producir pruebas para validar sus respuestas.

En su trabajo de investigación sobre *Representaciones, lenguaje, ¿qué tiene que ver con la comprensión en matemáticas?*, Neira Sanabria (2013), plantea a partir de Radford, el cambio del término usado como "traducir" en relación al pasaje del lenguaje natural al lenguaje simbólico por la idea "narrativa simbólica". La investigadora sostiene que el cambio de narrativa implica una "nueva manera de contar, de relatar, de describir, de interpretar con reglas propias y diferentes de la anterior forma de narrar: se pasa, en efecto a un espacio semiótico nuevo" (p.380).

En su estudio esta situación se evidencia, a partir de una actividad sencilla que supone la traducción de la siguiente frase: "Kelly tiene dos dulces más que Manuel". Neira Sanabria detecta en su análisis, que cuando esta expresión se transforma en "Kelly tiene lo que tenga Manuel más 2", hay un cambio de narrativa y esto conlleva a una complejidad mayor para determinar la solución del problema. Al cambiar de narrativa cambian los personajes de Kelly y Manuel a otros personajes, en este caso son las relaciones numéricas: "el más dos". Este "más dos" es el puente a la solución general de la actividad. Es decir, comienza a descontextualizarse la situación para entrar en un contexto matemático y donde las relaciones son generales y no están pegadas al caso particular de Kelly y Manuel.

De este modo, se observa que los sujetos y los adjetivos cambian de una narrativa a otra. No es una simple traducción de lenguaje natural a lenguaje simbólico, sino que los "personajes" cambian. Radford, citado por Neira Sanabria (op.cit.), dice que ese cambio muchas veces hace pensar en que los alumnos al traducir de lenguaje natural a lenguaje simbólico comprenden lo hecho. Sin embargo, muchas veces es una ilusión porque pueden realizar esa traducción y no cargarla de significado. Por eso Neira Sanabria en su estudio pone el foco en el cambio de narrativa, aún con lenguaje natural, pero con expresiones que aluden a relaciones matemáticas más generales, no situadas en los personajes concretos de Kelly y Manuel, sino en "el más dos".

En sus conclusiones Neira Sanabria (2013), sostiene que el cambio y reconocimiento de frases comparativas a frases aseverativas ayuda a reconocer y a introducir el uso de letras con el fin de designar cantidades desconocidas y usarlas para la elaboración de expresiones simbólicas matemáticas.

En relación a esta investigación, como nuestro objeto de estudio es la forma en que escriben, cómo lo hacen, qué tipos de registros de representación usan, qué transformaciones realizan al resolver y producir pruebas matemáticas, el aporte de Neira Sanabria en relación a la narrativa es sustantiva. Es importante reconocer que los estudiantes pueden producir otras narrativas en lenguaje natural, pero que no son todas del mismo tipo porque el espacio semiótico de una es distinto a la otra por lo que pueden expresar las relaciones implicadas.

## 2.2- En relación a la producción de pruebas matemáticas

En relación al estudio de las fundamentaciones matemáticas se toma la Tesis Doctoral de Duarte (2010) para establecer vínculos con la racionalidad matemática de los alumnos y los aspectos que inciden sobre esta. La idea de estudiante que presenta la autora es la misma que aporta Brousseau (2000) y es la que se considera en este estudio. La autora sostiene que la tarea del estudiante no se agota en la resolución de problemas, sino que también abarca la producción, formulación, prueba y construcción de modelos, lenguajes, conceptos y teorías de forma tal que puedan ser comunicados a otros. Como en este estudio se exige la formulación y producción de pruebas por escrito es indispensable que los estudiantes escriban un texto donde aparezca el registro de ellas. A su vez el análisis y la interpretación que se hace de las mismas tienen relación con las formas que eligieron para escribir y los tipos de representaciones que usaron para ello.

Otra consideración que realiza la autora en su estudio refiere a una categorización de actividad las que siguen:

- “trabajar la estructura “si......entonces” a partir de distintas actividades, por ejemplo, unir hipótesis con conclusiones, determinar hipótesis para alguna conclusión, determinar de un conjunto de conclusiones posibles alguna que se pueda deducir de alguna hipótesis.

- Decidir si una sentencia es verdadera o falsa.

- Encontrar contraejemplos que permitan dar evidencia sobre la falsedad de una sentencia" (pp. 134-135).

En relación a este estudio se utilizan las tres categorías en el problema que se propone a los estudiantes para que resuelvan. El problema exige también comunicar por escrito las razones de esa resolución, de manera tal de que expliciten las fundamentaciones producidas.

Asimismo, Duarte (op.cit.), destaca que luego de trabajar con algunos tipos de problemas, junto con los docentes participantes de su estudio llegaron a conceptualizar, que existe una conexión entre la *exploración y la producción* de ejemplos tendiendo un puente que conecta la formulación de preguntas o conjeturas con la producción de fundamentaciones.

El siguiente cuadro plasma esta conexión entre la *exploración y la producción* de ejemplos:

| | |
|---|---|
| EXPLORACIÓN | FORMULACIÓN DE PREGUNTAS Y CONJETURAS |
| EJEMPLOS "QUE EXPLICAN" PRODUCTO DE LA EXPLORACIÓN | FUNDAMENTACIONES PRODUCTO DE LA ABSTRACCIÓN/GENERALIZACIÓN QUE SE PRODUCE DESDE LOS EJEMPLOS |

*Cuadro 1-Conexiones entre exploración y producción de fundamentaciones. Duarte (2010, p.139)*

Obsérvese que, a partir de la exploración del problema, se pueden formular o verificar conjeturas que estén dadas en la situación o bien posibilitan que el estudiante las construya. Por otro lado, cuando se producen exploraciones, éstas pueden estar sujetas a presentarse con ejemplos que funcionan como explicaciones de primer grado, en el sentido de verificar lo conjeturado o lo que se ha pedido. Es así que se expresan ejemplos como producto de la exploración. Al decir de Balacheff (2000), tomado en el marco teórico, los ejemplos “que explican” de Duarte, podrían en algún caso funcionar como ejemplos genéricos. Es decir, no solo vinculados a los valores concretos, sino que esos ejemplos concretos “funcionan” como comienzo de ideas de generalización.

De esta manera esos ejemplos habilitan a pensar en generalizaciones y/o reglas que se producen a partir de los ejemplos estudiados. Al analizar el cuadro se observa que la exploración aparece como motor para producir fundamentaciones y pruebas, así como la formulación de conjeturas. En nuestro estudio las conjeturas son dadas. Sin embargo, la exploración del problema puede habilitar a los estudiantes a construir otras conjeturas además de las que el problema les ofrece.

En su estudio, Duarte (op.cit) caracteriza la idea de fundamentación, establece relaciones con las ideas de pruebas y refutaciones matemáticas de Lakatos y la idea de pruebas matemáticas de Balacheff, pero genera un constructo distinto: *las fundamentaciones*. Asume que hay algunas características en común con esos autores como las funciones de explicar, comprender y validar.

La autora presenta la siguiente caracterización de la fundamentación matemática en relación a los sentidos que los docentes pueden comunicar a sus estudiantes, cuando se producen fundamentaciones en el aula. La fundamentación:

- “propiciando la construcción y desarrollo de las ideas,
- como sostén de la verdad,
- como sistematización del conocimiento construido”. (Duarte, 2010, p. 245)

Esta caracterización de las fundamentaciones matemáticas ofrecida por Duarte es utilizada en esta investigación cuando se caracterizan las producciones de los alumnos en términos de categorías de manera conjunta con la de Balacheff (2000).

## 2.3- En relación a la escritura en Matemática

Continuando con Duarte (2010), en su Tesis Doctoral aparece un aspecto que para este estudio es fundamental, "la oralidad y la escritura en la emergencia de la fundamentación". La autora sostiene que:

> "… notamos que la escritura es un recurso que se va utilizando en distintos momentos y que no solo es necesaria, sino que al mismo tiempo es un insumo para otras fases de trabajo que se producirán nuevamente en contextos de oralidad. La amalgama, entonces de la oralidad con la escritura parece fundamental por varias razones: durante los procesos de escritura los alumnos enfatizan su posición reflexiva y pueden auto-observarse. Advertimos esta situación en muchos grupos, algunos trabajaban preponderantemente en la oralidad, otros se abocaban a escribir "todo lo que se pensaba o algo de ello" (p. 289).

La necesidad de registrar por escrito "todo lo que se pensaba o algo de ello" es un eslabón para continuar la producción de pruebas y considerar a la escritura como un proceso que ayuda a seguir aprendiendo, es decir que habilita a volver sobre lo pensado, sobre lo producido, sobre las ideas nuevas y su relación con las viejas ideas. Aquí se establecen puentes entre Carlino, el Movimiento Escribir en las Disciplinas, Duarte y este estudio, pues el foco comienza a ser la escritura en su función epistémica.

Agrega Duarte (2010) en su investigación, en relación a la utilización de la escritura y el tipo de registro de representación que la escritura de la fundamentación "se concibe desde un lenguaje familiar" (p.131). La idea de lenguaje familiar que plantea la autora es la de lenguaje natural al decir de Duval (1996), donde los símbolos matemáticos no son los centrales, sino que es la narrativa que se genera en la producción de las ideas matemáticas las que se tornan eje central del análisis, como se toma en esta investigación.

En Uruguay, en el marco de los cursos para Maestros en Servicio ofrecidos por PAEPU[1] (2012- 2015), se introdujeron como ejes de estudio la lectura, la escritura, la descripción, la explicación y la validación en todas las áreas del conocimiento, en particular en

[1] PAEPU significa Proyecto de Apoyo a la Escuela Pública Uruguaya.

Matemática. Estos cursos ponían el foco en 6° grado en los ejes explicitados intentando tender puentes entre la finalización de primaria y el comienzo de los estudios secundarios. El curso se llamó: “Curso de Egreso”. Además, participaban directivos e inspectores con el fin de articular estos procesos a lo largo de toda la Educación Primaria.

Se puede tomar este hecho como un reconocimiento de que se está comenzando a dar importancia en nuestro medio a la enseñanza de la escritura y la lectura en las distintas disciplinas. En particular en Matemática asume un sentido de necesidad para comenzar a interpretar y estudiar estos procesos a varios niveles en la educación en Uruguay.

Parte de esta experiencia (PAEPU, 2012-2015) se recoge en el libro “El hacer matemática en el aula. Un puente hacia la autonomía.” En este libro se plantea la posibilidad de que en nuestro medio se discuta y se estudie en particular la escritura y la producción de pruebas que pueden sostener los estudiantes durante el proceso de su formación básica.

En ese sentido el libro abre algunas posibles respuestas a las siguientes interrogantes: ¿Qué supone la escritura en Matemática? ¿Cuáles son las prácticas de escritura que realizan los alumnos? Los alumnos ¿realmente describen, explican y validan en las clases de Matemática? ¿Cuáles son las actividades que habilitan estas acciones?

Como el marco teórico de esta investigación es similar al propuesto en los cursos dictados por PAEPU y en la publicación de referencia, se lo ha tomado como un antecedente a nivel nacional de esta investigación.

# 3. Marco Teórico

En este capítulo se recorren los autores de referencia para este estudio. Se desarrolla en cuatro dimensiones donde se van especificando los autores en relación a: la escritura, a los registros de representación, a la producción de diferentes tipos de prueba en Matemática y a la perspectiva didáctica desde donde se fundamenta el estudio.

Los autores no se presentan aislados, sino que cada una de las dimensiones se asocia con la anterior y la que sigue a modo de producir reflexiones donde el hilo conductor es la escritura en matemática y la producción de fundamentaciones matemáticas.

## 3.1- En relación a la escritura

La escritura no es solamente un medio para expresar lo que se piensa ni exclusivamente un medio para trasmitir conocimiento, también contiene un potencial epistémico. Esto significa que no solamente sirve para registrar información o comunicarla a otros, sino que además puede ser un instrumento para acrecentar, revisar y transformar el propio saber (Carlino, 2004a). Sin embargo, desde las propuestas docentes, la escritura es usada casi exclusivamente como forma de evaluación más que como un instrumento para construir ideas y pensar críticamente.

En esta misma línea de trabajo y como marco de referencia que se toma en este estudio, aparece el enfoque planteado por el Movimiento Escribir a través del *Currículum*. Este movimiento sostiene que “la escritura es una herramienta fundamental para aprender y propone usarla más allá de las clases de Lengua”, (Carlino, 2004a, p.2). Este enfoque se ocupa de la escritura en cada área en particular.

La escritura es una herramienta semiótica que cambia las condiciones de trabajo de la mente humana. Es así que los procesos de leer y escribir ponen en marcha formas de funcionamiento cognoscitivo de mayor nivel que simplemente escuchar (Carlino, 2015). De este modo el individuo que escribe, al mismo tiempo que produce su escrito, va transformando su pensamiento y a medida que lo transforma, revisa lo que ha estado produciendo por escrito como forma de acrecentar su saber. Es un proceso dialéctico donde interviene la escritura y los conocimientos, que en nuestro caso se trata de conocimientos matemáticos.

Por otro lado, Hjortshoj, citado por Carlino (2004a), sostiene que la función del profesor no sería leer las producciones de los estudiantes como corrector, porque de esta manera se estaría poniendo el foco solamente en la calificación y los errores de los estudiantes. Mientras que, si por el contrario se pone el foco en la organización de las ideas que el alumno fue poniendo en juego en su escrito, se habilita al estudiante a reorganizar esas ideas, volver sobre lo pensado para mejorarlo con el fin de detectar lo no completo, lo escaso o las virtudes de esa producción.

Es así que unos de los asuntos sustantivos que plantea el Movimiento Escribir a través del C*urrículo* es la promoción de caminos diversos para que los estudiantes aprendan a revisar lo escrito en tanto contenido y estructura de la disciplina. Además, ese proceso los habilita a volver a pensar sobre las ideas y conceptos abordados en sus escritos, profundizarlos y/o construirlos durante ese proceso.

Es de particular importancia la revisión de lo hecho y la mejora de las producciones escritas porque va determinando la manera de lo que el alumno va pensando y construyendo a partir de sus conceptualizaciones. Una manera de mostrar ese proceso de conceptualización es a través de la escritura de ideas matemáticas. Es sustantivo, especialmente en la formación docente, el involucramiento de los estudiantes en su escritura para así hacerlos partícipes de las prácticas discursivas de la matemática pues no solamente deberán dominarla como profesionales sino además, enseñarla. En este sentido es importante mencionar el aporte de Gottschalk, (1997) citado por Carlino (2004a), donde expresa que “un programa de escritura debe trabajar para, con y en beneficio de las disciplinas, el sitio en el que el lenguaje habita; no puede estar aislado administrativamente” (p.23).

Como se sostuvo anteriormente, el proceso de escritura académica a nivel universitario presenta, según Carlino (2004b), cuatro[2] dificultades específicas. Entre ellas se encuentra

[2] Las cuatro dificultades se refieren a: la dificultad para escribir teniendo en cuenta la perspectiva del lector; el desaprovechamiento del potencial epistémico de la escritura; la propensión a revisar los textos sólo en forma lineal; la dilación o postergación del momento de empezar a escribir.

la que corresponde al desaprovechamiento del potencial epistémico de la escritura. Este será uno de los focos en que se centra este estudio con el fin de obtener insumos para el trabajo con esta dificultad en de los IINN de Montevideo en clases de Matemática.

## 3.2- En relación a los registros de representación

Por otro lado, Panizza (2003), centrándose ya en matemática, plantea que los estudiantes utilizan representaciones escritas durante el proceso mismo de resolución de un problema. Estas representaciones los ayudan a pensar, a recordar, a guardar información, a calcular, etc. Las representaciones son un medio para la resolución del problema y en consecuencia cumplen una función diferente que cuando los estudiantes las utilizan con el fin de comunicar algo para otros. Se trata de funciones diferentes de las representaciones, aquellas que se usan para resolver un problema y las que se usan al comunicar su solución. Con frecuencia, estas dos funciones vienen juntas por la exigencia de la tarea propuesta al estudiante. De tal modo que el sujeto que realiza la actividad no distingue en acto ambas funciones de las representaciones.

En ese sentido, al dialogar con ambas autoras, la función de las representaciones en relación a la resolución del problema que plantea Panizza (2003) sería lo que a su vez Carlino (2004b) propone como función epistémica del escribir. Es decir que la escritura comienza a funcionar como medio para aprender y no solamente para guardar información ni comunicárselo a otro. En este estudio la escritura funcionaria para producir nuevas ideas matemáticas.

Como esta investigación se centra en la escritura en matemática, es necesario considerar la característica de los objetos de estudio de la matemática. Como se sabe, los objetos de estudio de la matemática son ideales. Por ejemplo, los conjuntos numéricos, las figuras geométricas, sus relaciones, etc., no pueden ser percibidos por los sentidos, es decir, no tienen “lugar” en el espacio físico real. En consecuencia, no es posible tocar un triángulo, ni al número 2. La escritura matemática podría tender puentes con la imposibilidad de accesibilidad física al objeto de estudio y finalmente, entre el objeto y su representación.

Por otro lado, las representaciones usadas por los estudiantes ayudan a comprender las condiciones bajo las cuales una representación funciona. De este modo reconocer una variedad de representaciones para un mismo objeto matemático que utilizan los alumnos da pistas a quienes se preocupan por la enseñanza y el aprendizaje de una manera de conocer constitutiva de esos conocimientos matemáticos.

Esta situación hace necesaria la utilización de diferentes formas de representación. En particular Duval (1993, 1996, 1999, 2006, 2011) en su Teoría de los Registros de Representación Semiótica, plantea la necesidad de que los estudiantes utilicen diferentes tipos de registros de representaciones semióticas, con el fin de poder acercarse a los objetos de estudio de la matemática. El autor sostiene que poder manejar con sentido, diferentes tipos de registros de representación amplía las ideas que los estudiantes van construyendo de esos objetos, porque cada uno de esos registros en particular se enfoca en aspectos diferentes de esos conceptos.

Según Duval (2006), lo que importa es la propiedad de transformación de las representaciones semióticas. Los signos por sí mismos no son importantes, lo que interesa es cómo se pueden sustituir por otros signos, según la exigencia de la situación. Esto significa que, si no existe una coordinación interna sobre estos registros, los objetos que ellos representan se "ven" diferentes. En general lo que sucede con los alumnos cuando aprenden matemática es el hecho de no reconocer en registros diferentes un mismo objeto matemático. Los objetos matemáticos son confundidos con la representación utilizada. Por ejemplo, la idea de número tres con el signo "3" o con "III" o el dibujo de tres árboles. En la primera representación el "3" encierra la numerosidad sin embargo en "III" y en el dibujo de los tres árboles, la numerosidad está explícita.

La construcción de la coordinación entre los signos en relación a las ideas matemáticas es construida por el sujeto que aprende y es lo que hace cargar de sentido al objeto matemático en juego.

En este trabajo se utilizan "registros de representación semiótica" en el sentido que Duval (1996) lo plantea, y se refiere a un sistema de signos que permite cumplir la función de comunicación, tratamiento y objetivación, no refiriéndose a las notaciones convencionales que no forman un sistema. Por ejemplo, en el sistema de numeración decimal las representaciones de los números forman un sistema y cumplen con ciertas reglas, verificándolas sin importar el conjunto numérico que esté en juego. Sin embargo, no forman un sistema[3] las letras o el conjunto de símbolos que se utilizan para el trabajo algebraico.

### La paradoja de Duval

En relación al uso de los registros de representaciones semióticas que necesitarán los estudiantes para producir un texto matemático se recoge el planteo esencial de Duval (1993, p. 38), citado por D´Amore (2004), donde analiza el uso de las representaciones semióticas como una paradoja intrínseca del aprendizaje matemático:

> "… de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos que están en fase de aprendizaje no podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos solo pueden tener relación con estos a través de dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja se vuelve aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas."

[3] La idea de sistema se puede asociar a lo presentado por Damisa (2009), en *Irineo Funes: La memoria absoluta o el sistema de numeración*, donde explicita: "(…) un sistema, muestra en la superficie un resultado que parece contradecir la complejidad de la cual es producto. Si pensar es abstraerse, olvidar diferencias, la construcción de un sistema de numeración, y más aún la validez social de esa construcción, tiene como objetivo la simplicidad que provoca la comunicación (…). En otras palabras, para reducir la complejidad fue necesario aumentarla y pasar de los elementos aislados, al sistema. Al decir de Borges, "esa polifonía de frases inconexas" de Funes, es tan débil que muestra la flaqueza, no en los nombres sino en la ausencia de sus relaciones." (p.77)

El autor aporta la idea de que acercarse a construir ideas matemáticas es complejo, puesto que es imprescindible el uso de distintos tipos de registros de representación y estos, a su vez, no pueden ser confundidos con esas ideas matemáticas. Aparece así la idea de que es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que a su vez se le reconozca en cada una de ellas. En ese sentido las representaciones funcionan como verdadera representación, es decir, ofrecen el acceso al objeto matemático representado. Toda confusión entre el objeto y su representación, provoca con el correr del tiempo una pérdida de comprensión.

Se llega por tanto a estar frente a un conflicto "casi inevitable", porque como dice Duval (2006) "la actividad debe satisfacer dos requisitos que entran en conflicto:

- Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente, incluso si se elige el tipo de representación semiótica.

- Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas" (p.157).

La primera condición tiene relación con el estatus epistemológico de la matemática. Es decir que los objetos matemáticos, como ya se ha mencionado, no son accesibles físicamente. Es decir que la única manera de acceder a ellos es a través de las representaciones. Sin embargo, la necesidad del uso de signos no se limita únicamente a su representación, sino que lo fundamental es trabajar con ellos transformándolos en otros signos que muestren otras propiedades de los mismos para poder lograr conceptualizar las ideas matemáticas. De este modo, sostiene Duval (2006), "sin mediaciones semióticas no es posible la actividad matemática" (p.158).

En este sentido, la producción de textos matemáticos supone la escritura en torno a una actividad matemática. Para la producción de ese texto es necesario elegir algunas representaciones particulares según sea la tarea a desarrollar. En general esta escritura se asocia a la resolución de problemas escribiendo números, realizando algunas representaciones geométricas, algebraicas o funcionales, según sea la actividad propuesta. Sin embargo, la elección del tipo de registro de representación que el estudiante hace no es ingenua. La marca que él elige está relacionada con lo que sabe o lo que puede exteriorizar de ese objeto matemático y a su vez representa de alguna manera las relaciones matemáticas que está construyendo.

A medida que el alumno produce el texto matemático entra en relación con el saber que construye. Según Sadovsky (2005), la representación de un determinado objeto matemático abarca, tanto la construcción de la representación como la posibilidad de operar con dicha representación, realizando transformaciones regidas por las leyes del registro en el que se representa, atendiendo a lo planteado por Duval (2006).

Algunos autores (Bosch, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; Duval, 1995), citados por Sadovsky (2005), explicitan que las transformaciones que se realizan con las representaciones cumplen una función en la producción de nuevas relaciones y de nuevas significaciones para relaciones ya conocidas. Por lo que, se irían entrelazando nuevas ideas matemáticas que al principio de la tarea no se tenían. Es decir que el estudiante enfrentado a la experiencia de producir un texto y resolver las actividades logra entrelazar nuevas ideas con viejas ideas. La elección de esos registros en la producción del texto no es inocente, es intencionada porque tienen relación con lo que va pensando y construyendo como nuevas ideas.

En Semiosis y Pensamiento Humano, Duval (1996), plantea que en particular el aprendizaje de la matemática necesita de la utilización de sistemas de expresiones y de registros de representación además del lenguaje natural y de las imágenes. Por ejemplo, sistemas variados de escrituras para los números, notaciones simbólicas, escrituras algebraicas y lógicas, expresión para las relaciones como las operaciones, figuras geométricas, gráficos de distintos tipos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Además, Duval (1996) sostiene que la comprensión matemática requiere una coordinación interna entre los posibles sistemas de representación semióticos que se pueden elegir y utilizar. Es necesario que los alumnos puedan desarrollar esa coordinación interna para que puedan cruzar el umbral a la conversión de representación.

Por tanto, se estaría en presencia de dos tipos distintos de transformaciones: la de tratamiento y la conversión.

El tratamiento es una transformación que se va dando en el mismo registro de representación. A modo de ejemplo: al resolver un problema donde intervenga *la suma* el estudiante determina qué números son los que intervienen, los presenta y luego calcula la suma. Allí hay una transformación de tratamiento dentro del registro aritmético, es decir usando números y signos matemáticos.

La conversión, por su parte, es una transformación donde los registros que se usan pertenecen a diferentes registros de representación. Es así que cuando se ofrece el enunciado de un problema en lenguaje natural que se resuelve con una suma, en general los estudiantes necesitan cambiar de registro de representación y usar por ejemplo un registro aritmético para resolver el problema, expresando así la suma a través de símbolos matemáticos y registros numéricos convencionales.

Duval (2006), refiriéndose a los dos tipos de transformaciones sostiene que la comprensión conceptual no es la condición de la coordinación entre los distintos registros, sino que, la conceptualización surge del desarrollo de esa coordinación.

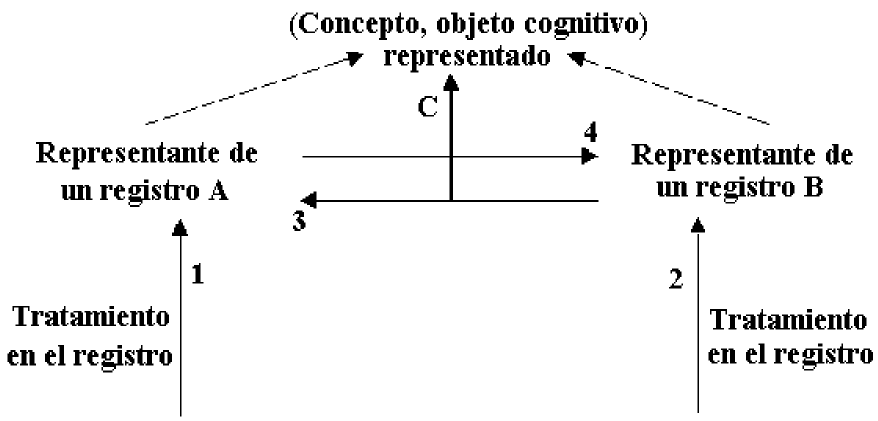
En síntesis, se comprende a medida que se movilizan distintas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático. Por lo tanto, lo que importa para la enseñanza de la matemática no es la elección del “mejor sistema de representación” sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

Según Duval (2006), “la conversión se convierte en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada. En otras palabras, este método puede ser utilizado para el análisis de textos, empezando por el texto del problema.” (p. 162).

Por otro lado, el autor sostiene que algunos tratamientos también tienen una complejidad cognitiva específica, en particular los que usan el lenguaje y la visualización.  A su vez plantea que la forma de expresar y entender los comentarios lingüísticos no es la misma dentro, que fuera de la matemática (Duval, op.cit.).

El cuadro que sigue, extraído de Hitt (2000, p. 170), muestra las posibles transformaciones a la hora del uso de distintos registros de representación. El autor ejemplifica diciendo:

> "Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros".




*Cuadro 2- Transformaciones en el uso de distintos registros de representación*

Estos sustentos teóricos son algunos de los pilares de este estudio pues permiten analizar las conversiones y tratamientos que se van produciendo por parte de los estudiantes al resolver un problema de corte aritmético- algebraico. De igual forma las escrituras que se realizan al producir las validaciones correspondientes son objeto de análisis según lo planteado por Duval (2006).

## 3.3- En relación a la producción de pruebas

Otro aspecto a considerar en este estudio es la producción de justificaciones, de fundamentaciones y de pruebas matemáticas en la escritura exigida. Es parte del hacer matemático fundamentar las decisiones que se toman, de lo contrario estas decisiones quedan en el nivel de conjeturas. Sin embargo, esta necesidad no es algo “natural” en el trabajo que se desarrolla en el aula. Para que el estudiante produzca pruebas es necesario plantear un contrato didáctico donde la validación del conocimiento producido sea indispensable.

En Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Balacheff (2000), explicita la diferencia sobre explicación, prueba y demostración. El autor sitúa la explicación al nivel del sujeto locutor. En ese sentido considera la explicación como un discurso que pretende hacer legible el carácter de verdad de una proposición a los espectadores a través de las razones ya adquiridas por el locutor. La base de la explicación es esencialmente el lenguaje natural. Para Duval (1999), los enunciados de una explicación tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento.

Por otro lado, una prueba, en términos de Balacheff (2000), es una explicación que asegura el carácter de validez de una proposición y que además es reconocida y aceptada por una comunidad. Esta condición exige que los interlocutores compartan un sistema de validación común entre ellos. Y la explicación, al alcanzar un carácter social de aceptación de una comunidad, es plausible de convertirse en prueba. Esto trae como consecuencia que una explicación no siempre es aceptada por una comunidad porque depende de su tiempo, de las consideraciones sociales y culturales de la misma.

En este trabajo se considera al aula como una comunidad donde las explicaciones puedan transformarse en prueba a partir de un proceso de producción de trabajo matemático. Bajo estas circunstancias un discurso que asegure la validez de una proposición -si es aceptada por una comunidad- cambia de posición: de explicación a prueba. No es solamente importante el cambio de estatus, sino además estas pruebas se incorporan a procesos de conceptualizaciones y teorizaciones de ideas matemáticas puestas en juego.

En matemática se presenta un tipo de prueba particular, que se llama demostración. La demostración trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Como género del discurso, las demostraciones se caracterizan por su forma codificada.

Desde el punto de vista de la actividad matemática Balacheff (2000) identifica dos tipos de pruebas: pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. En las pruebas pragmáticas, la justificación de la actividad está asociada a su eficacia para la resolución de la cuestión planteada. Son pruebas íntimamente ligadas a la acción y a la experiencia de los que las producen. Las propiedades están usadas implícitamente y comprobadas en la acción. Los conocimientos funcionan como conocimientos prácticos. Además, el lenguaje utilizado para explicitarlas es familiar, coloquial. También lleva la marca del tiempo y de la acción del que la produce.

En cambio, en las pruebas intelectuales, la justificación de la actividad es conocer la verdad. Es así que es necesario un cambio de posición del sujeto que la produce, ahora la acción y los conocimientos se vuelven objeto de reflexión. Por otro lado, en este tipo de pruebas el lenguaje utilizado es funcional, impersonal, simbólico, descontextualizado, destemporalizado. Son pruebas en las que sus autores tomaron distancia de la acción. Dentro de las pruebas intelectuales se encuentra la demostración. Obsérvese que una de las diferencias entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales *son las herramientas lingüísticas puestas en juego.*

El siguiente cuadro, tomado de Chemello y Crippa (2011, p.64), muestra lo explicitado anteriormente en relación a los dos tipos de pruebas planteado por Balacheff (2000).

| Naturaleza de los conocimientos | Lenguaje de la formulación | Tipo de prueba |
|---|---|---|
| **Práctica (saber hacer)** | De la familiaridad | Pragmáticas |
| **Teórica (saber científico reconocido)** | Funcional | Intelectuales |

*Cuadro 3- Tipos de pruebas y características*

Por otro lado, Panizza (2005) en Razonar y conocer, plantea que la producción de conocimiento matemático transita por diferentes formas de razonar. Durante la resolución de un problema se comienza en general con una fase heurística, donde se buscan relaciones de manera desordenada, se ensaya, se van organizando las ideas que se producen, se elaboran conjeturas. En este proceso además de usarse encadenamientos deductivos se toman prácticas argumentativas de otras áreas del conocimiento, como la inducción y la analogía.

A veces se plantea un análisis de casos particulares, otras veces se toman ideas de un problema más sencillo ya resuelto, o de uno parecido y luego se vuelve al problema original con las nuevas ideas. Pero esto no es suficiente, al momento de dar cuenta de los resultados producidos, la racionalidad matemática exige dejar de lado en las explicaciones producidas, las formas no deductivas para lograr resultados legítimos en la comunidad matemática de referencia.

Sin embargo, es necesario cuando un estudiante transita por la producción de conocimiento, ampliar la idea del proceso de validación y no dejar reducido ese proceso de validación solo a la demostración, que es la prueba por excelencia de la matemática.

En este sentido se toma de Margolinas (1993) la idea de que el sujeto que está aprendiendo necesita transitar por la forma de producir conocimiento de la matemática, y plantea que la validación es un proceso que funciona en paralelo con el proceso de resolución del problema. Además agrega, que una de las funciones de la matemática es pensar la anticipación de la acción, y esta anticipación hace referencia a la predicción y a la garantía de validez de esa predicción. Aparece así una relación dialéctica entre la resolución, la predicción y el proceso de validez que entreteje relaciones que el estudiante tiene disponibles. Además, este proceso habilita la producción de nuevas relaciones matemáticas.

La autora propone que en la enseñanza es necesario que se produzca una toma de conciencia de las pruebas que se construyen y también un análisis de las mismas. Es por eso que al invitar a los estudiantes a resolver situaciones matemáticas no necesariamente aparecen todos los tipos de pruebas. Por lo que, se pueden encontrar tanto pruebas intelectuales como pragmáticas de distinto grado de profundidad.

A continuación, se ejemplifica lo narrado por Margolinas (1993) con una experiencia llevada a cabo por Sadovsky (2015). Esta experiencia fue realizada con alumnos de 4° y 5° grado de escuela primaria, en la que debían identificar criterios para saber cuándo un número es divisible entre 4. Algunos de esos alumnos planteaban ejemplos que valían siempre y otros alumnos planteaban posibles criterios con algunos ejemplos que sí valían pero que no eran generales, es decir que no son válidos para la matemática. El siguiente fragmento ilustra esas ideas:

> "En tu ejemplo no es verdad, pero en el mío sí", respondió un joven cuando le ofrecimos un contraejemplo para convencerlo de que renunciara a una afirmación que realizaba. Respuestas como esta, son frecuentes en las clases de matemática. ¿Qué enseñan? Como toda disciplina, el trabajo con la matemática ofrece un modo específico de construir una relación con la verdad." (p.1)

Al producir pruebas matemáticas se necesita recorrer procesos donde no solamente haya verdades en las proposiciones de los alumnos. Además es necesaria la construcción de razones matemáticas que den sustento a esas verdades (Sadovsky, 2015). Estas razones no son de cualquier índole, sino que deben tener carácter necesario, universal y anticipatorio. Construir estas razones por escrito lleva un grado cognoscitivo mayor que expresarlas oralmente (Carlino, 2015). En este sentido es posible hacer dialogar a Carlino y a Sadovsky entre las relaciones de la función epistémica del escribir, en este caso en matemática, y la forma de expresar las razones matemáticas.

Una pregunta relevante en relación a las fundamentaciones puede ser: ¿todas las pruebas que producen los alumnos son del mismo tipo? Sin embargo, se sabe que las categorías de prueba que producen los estudiantes y las que se produjeron y se producen históricamente son muy diversas extremo que se ha tratado de justificar con los autores anteriormente presentados.

## 3.4- En relación a una perspectiva didáctica

Para este estudio se considera la actividad a proponer a los estudiantes en relación a la Teoría de las Situaciones Didácticas (en adelante TSD), (Brousseau, 2007). En ese sentido se toma la noción de situación de validación como modelo para pensar situaciones donde la producción de pruebas constituya la solución óptima a un problema.

En la TSD existen tres tipos de situaciones: las de acción, las de formulación y las de validación. Esta categorización depende de las interacciones del sujeto que resuelve la situación con el medio[4]. Es así que las situaciones de validación se conciben como una forma de estudiar la construcción de significado de una teoría matemática. Las pruebas que se producen a partir de la resolución de la situación le dan sentido a los conocimientos puestos en juego por los estudiantes con el fin de que circulen luego, dentro de la clase, para que de este modo los alumnos se vayan apropiando de dichos conocimientos.

En particular las situaciones de validación dentro de la TSD ponen el énfasis en que los sujetos que resuelven esa situación deben enunciar proposiciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Además, esas proposiciones y sus valores de verdad necesitan ser sancionadas por cada sujeto, o grupo de estudiantes, es decir que es necesario producir pruebas para valorar esas proposiciones. Esas situaciones tienen su centro en las interacciones con el medio. En las situaciones de validación se validan afirmaciones que producen los estudiantes.

La situación que se le propuso a los estudiantes en esta investigación está en el marco de las actividades de validación en la TSD. Dicha situación es matemática y exige al que lo aborda no solo resolverlo, sino producir fundamentaciones sobre lo hecho. Es decir que se toma posición por una manera de hacer matemática donde el alumno sea el que las produce. Para ello es necesario poner en relación lo que sabe, con lo que explora, y con lo que produce con el fin de pensar sobre lo hecho y dar un valor de verdad a esas respuestas.

[4] La idea de medio es la que presenta Brousseau en su TSD.

La producción de fundamentaciones le permite al estudiante posicionarse en la elaboración de generalizaciones, donde éstas se prueben y sean parte de una trama de ideas matemáticas que se van tejiendo. La idea es que ese tejido se pueda evidenciar en este estudio a través de la exigencia de la escritura.

# 4. Metodología

En este capítulo se presenta la información sobre el tipo de diseño y el alcance de la investigación. Se indica y define la unidad de análisis, también sus dimensiones y los indicadores que las mismas pueden tomar en el marco de este estudio. Se exponen las condiciones bajo las cuales se desarrolló el estudio y los criterios de selección de la muestra, así como los métodos de recolección de información, y el proceso para asegurar la calidad, credibilidad y confiabilidad de la investigación.

## 4.1- Tipo de diseño y alcance de la investigación

Este estudio se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, descriptivo-interpretativo, con diseño de estudio de caso. En el análisis se utilizaron algunos elementos de la teoría fundamentada.

Es un estudio de caso porque se describe y analiza en profundidad la escritura producida por alumnos de Matemática I y II de los Institutos Normales de Montevideo. Al decir de Stake (1998), de un estudio de caso se espera que abarque la complejidad de un caso particular, donde el análisis sea intenso.

El tipo de muestreo es homogéneo y transversal. El contexto es el aula de Matemática de los IINN de Montevideo, en dos grupos correspondiente al primer y segundo curso de formación de maestros en las asignaturas Matemática I y II. Se describe y analiza la escritura matemática producida por los estudiantes frente a un problema de corte aritmético- algebraico donde se los convoca a resolverlo y a escribir la fundamentación matemática que ellos crean conveniente para validar el resultado obtenido.

Además de realizar una descripción detallada de las producciones de los estudiantes, al realizar el análisis de las mismas se construyeron categorías bajo las cuales se realizaron las interpretaciones.

Estas categorías están guiadas por el marco teórico de referencia en dos niveles en relación:

1) al uso de los distintos registros de representación semiótica en juego en las escrituras producidas y sus transformaciones y

2) a los tipos de pruebas matemáticas.

En relación al último punto se han comenzado a construir algunas caracterizaciones de lo encontrado que la teoría por ahora no especifica. Por eso este estudio posee elementos de la teoría fundamentada:

> "entendida como aproximación inductiva en la cual la inmersión en los datos sirve de punto de partida del desarrollo de una teoría sobre un fenómeno" (Guillemette, 2006), que tiende "a generalizar en la dirección de las ideas teóricas, subrayando el desarrollo de teorías más que la prueba de una teoría" (Hunt & Ropo, 1995, p.vii).

A partir de la recolección de los datos el análisis interpretativo estuvo focalizado en continuar produciendo teorizaciones donde se intentan completar algunos huecos que en la literatura de referencia no se han desarrollado aún.

A su vez, se describen y analizan las interacciones de los estudiantes a través de la escritura. Estas interacciones son las que se construyen entre el objeto de conocimiento matemático puesto en juego y el estudiante. El análisis del objeto matemático se realiza través de la escritura matemática de acuerdo a los distintos registros de representaciones semióticas utilizados en los textos producidos por los estudiantes. Por otro lado, en ese texto se continúa el análisis sobre las pruebas matemáticas producidas.

De este modo se caracterizó la escritura de textos en el aula de matemática, elaborados bajo ciertas condiciones[5]. Se procuró construir una caracterización de dicha escritura a través del análisis y descripción de los patrones recogidos en los textos matemáticos producidos por los estudiantes a través de las dimensiones que se presentan en el próximo apartado y también en otras dimensiones que se desarrollaron.

[5] Cuando se dice "bajo ciertas condiciones" se alude a considerar al estudiante como productor de conocimiento durante el hacer matemático en cuestión.

## 4.2- Operacionalización de los conceptos

En este apartado se caracteriza la unidad de análisis, las dimensiones que se estudian de ella y los indicadores para esas dimensiones de acuerdo a la pregunta que guía esta investigación: *¿Qué características tiene la escritura en Matemática de los estudiantes magisteriales al resolver una actividad de corte aritmético - algebraico que exige fundamentar?*

### 4.2.1- Unidad de análisis: Escritura en Matemática

A continuación, se presenta una caracterización sobre lo que se propone en este trabajo como escritura matemática[6].

### Caracterización de Escritura Matemática

Se entiende por escritura matemática toda marca que se produzca en un contexto de "producción matemática". Este "hacer matemático[7]" tiene que ver con la resolución de actividades que involucren ideas matemáticas. Las marcas que se usan en la escritura son de cualquier índole siempre que representen objetos matemáticos, relaciones, propiedades. Las representaciones que se utilizan en la escritura matemática pueden tener cuatro funciones diferentes. Porque son utilizadas para:

a) resolver la situación,
b) comunicar esa resolución,
c) validar esa resolución y
d) volver sobre lo pensado, como función epistémica, con el fin de ayudar a conectar los conocimientos que los alumnos elaboran en relación a ese objeto matemático.

Estas cuatro funciones están relacionadas y no son independientes. Muchas veces una función ayuda a otra según las exigencias de la escritura.

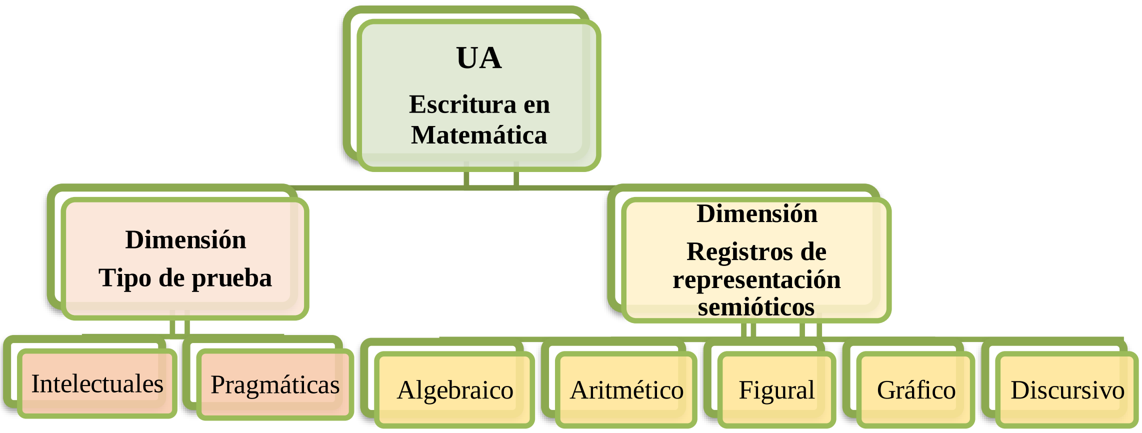
[6] Esta caracterización de la escritura en matemática es una elaboración propia.
[7] Se entiende por hacer matemático a partir de Charlot (1986), "estudiar matemáticas es efectivamente HACERLAS, en el sentido propio del término, construirlas, fabricarlas, producirlas, ya sea en la historia del pensamiento humano o en el aprendizaje individual. No se trata de hacer que los alumnos reinventen las matemáticas que ya existen sino de comprometerlos en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos". Conferencia dictada en Cannes.

### 4.2.2- Dimensiones de la unidad de análisis e indicadores

Se ha confeccionado el cuadro 4 con el fin de mostrar la unidad de análisis, con sus dos dimensiones consideradas para esta investigación y los indicadores de cada una de esas dimensiones.

El cuadro muestra la unidad de análisis: **Escritura en Matemática**. Las dos dimensiones de esa unidad son los tipos de: **pruebas** que podrán producir los estudiantes y los **registros de representación semiótica** que han elegido los estudiantes para producir esa escritura.

A su vez se señalan los indicadores que pueden tomar esas dimensiones. Entre los tipos de pruebas se clasifican en **pruebas pragmáticas** y **pruebas intelectuales** (Balacheff, 2000). Entre los valores que pueden tomar los tipos de registros de representación semiótica se recurrirá a los que presenta Duval (2006), **registros aritméticos, algebraicos, figural, gráfico, discursivo.**




*Cuadro 4- Unidad de Análisis y dimensiones*

Algunas de las dimensiones e indicadores, correspondientes al cuadro 4, se encontraron a partir del análisis de las producciones de los estudiantes. También se tuvo en cuenta en dicho análisis las posibles funciones de la escritura producida por los alumnos indicadas anteriormente.

## 4.3- Muestra

La muestra elegida para este estudio son dos grupos de estudiantes para maestros de los Institutos Normales de Montevideo María Stagnero de Munar y Joaquín Suaréz. Estos dos grupos están formados por los alumnos de Matemática I y II respectivamente. En total se recogieron producciones de 39 estudiantes pertenecientes al turno de la mañana.

Para la selección de los grupos de estudiantes se tuvo en cuenta las siguientes consideraciones. En primer lugar se consideró que estuvieran representadas las dos asignaturas que corresponden a la formación en Matemática de maestros, para que el estudio cubriera alumnos de los cursos de Matemática I y II. A su vez, generalmente los estudiantes que cursan en el turno de la mañana tienen menos rezago en el desarrollo de la carrera y también son los que en su mayoría solo se dedican a estudiar o a trabajar pocas horas, lo que en principio indicaria una posibilidad de mayor potencial para el estudio durante el cursado de la carrera.

La población de estudio quedó conformada de la siguente manera: de los 39 estudiantes, 25 alumnos corresponden al curso de Matemática I y 14 pertenecen al curso de Matemática II. Como ya se explicitó ambos grupos corresponden al turno de la mañana de los IINN de Montevideo.

## 4.4- Instrumentos

Los instrumentos que se consideraron para la recolección de datos fueron los siguientes:

- **una situación matemática** con el fin de recoger la producción escrita de su resolución y la fundamentación correspondiente de lo hecho por parte de los 39 estudiantes.

- **Entrevistas** en audio y su correspondiente desgrabación realizadas a 10 alumnos que se consideraron representativos en el uso de cambios de registro de representación durante la escritura.

- **Bitácora del investigador** donde se recogió y fueron anotadas durante todo el proceso de la investigación ideas y dudas que surgían, así como la descripción de los pasos seguidos y las características de los momentos, etc. La bitácora en tanto documento de registro también fue usada durante el proceso de auditoría externa para confrontar los resultados obtenidos con dos expertos.

**1) <u>Caracterización de la situación matemática</u>**

Se propuso a los 39 alumnos un problema de corte aritmético- algebraico para que los estudiantes lo resolvieran y produjeran una fundamentación por escrito de lo hecho.

En ambos grupos estudiados el tiempo promedio que utilizaron los estudiantes para realizar la tarea fue aproximadamente 45 minutos. Se realizó en días distintos.

La elección del problema en esta investigación fue determinante porque de él dependía la recogida sustantiva de información. El diseño del problema en gran medida habilita o dispara la producción de escritura, que son la base del análisis de esta investigación.

Con ese objetivo se diseñó una situación matemática de corte aritmético /algebraico que posibilitara explorar, conjeturar, generalizar y validar lo realizado a través la escritura. El diseño tuvo en cuenta lo que propone Brousseau (2007) en su TSD. Para ello se realizó detalladamente el análisis didáctico a priori de la actividad que se presenta en el apéndice.

**Enunciado de la situación matemática**

El enunciado de la situación matemática propuesta a los estudiantes de los dos grupos fue la siguiente:

*Ana dice que siempre que suma tres números impares consecutivos el resultado es un número múltiplo de 3.*

*A) ¿Es verdadera la afirmación de Ana?*

*B) Y si suma tres números pares consecutivos, ¿sucederá lo mismo?*

*Fundamenta cada una de tus respuestas.*

*Cuadro 5- Enunciado de la actividad*

## 2) Entrevistas

Se realizaron entrevistas a 10 alumnos en cuyas producciones se evidenciaron cambios en el tipo de registro de representaciones usados en su producción escrita. Estos 10 alumnos son representativos de todos aquellos que utilizaron cambios en los registros producidos. Es decir que las entrevistas se hicieron posteriormente al análisis de las producciones escritas de los estudiantes.

El tipo de entrevista usada fue no estructurada (Corbetta, 2007), es decir que no se predeterminó el diseño de las preguntas, para que pudiera variar de un alumno entrevistado a otro según fuese la producción escrita producida de cada uno.

El objetivo de las entrevistas fue recoger la voz de los estudiantes en relación a los cambios de registros realizados. Por un lado, para determinar de primera mano, si esos cambios fueron “conscientes” o se produjeron “sin pensar”. A su vez dentro de los “cambios conscientes” recoger información sobre las razones de la decisión tomada para confrontar con las hipótesis de trabajo. Es decir, no solo contar con información a partir del análisis y su correspondiente interpretación desde el desarrollo teórico, sino también desde su propia voz.

Las entrevistas a los estudiantes funcionan como una **auditoría interna** al decir de Sampieri (2016), con el fin de garantizar la credibilidad de la investigación.

Se contó con la desgrabación del audio de las 10 entrevistas. La información recogida ayudó sustantivamente a confrontar con las hipótesis de trabajo que se venían desarrollando en relación a la construcción de categorías con los indicadores presentados en el apartado correspondiente a la unidad de análisis y el que se presenta en el próximo capítulo.

### 3) <u>Bitácora del investigador</u>

La bitácora del investigador es otro instrumento usado para recoger información. Según Guber (2011), "el acto de transcribir notas constituye una de las herramientas por excelencia para la elaborción reflexiva de lo que ocurre en el campo y, simultánea e inexorablemente, para la producción de datos" (p.96).

Por otro lado la autora sostiene que la fuente del proceso de registro es la que se genera a partir de la confrontación de actividades, personas, lugar y tiempo. En esta investigación se tomaron en cuenta las cuatro variables que asocia Guber (2011). El registro en la bitácora del investigador fue considerada no como depósito de información sino como un diálogo continuo en el proceso de investigación que se llevó a cabo.

Además, toda la "documentación registrada en la bitácora ya sea referido a las observaciones o líneas de pensamiento tienen el objetivo de minimizar la influencia de las concepciones de la investigadora con el fin de garantizar la confiabilidad del proceso de estudio" (Sampieri, p.473).

En ese sentido, el registro en la bitácora consistió en registrar todas las notas durante la puesta en acto de la resolución del problema en ambos grupos como así también durante las entrevistas. Se recogió también en la bitácora líneas de pensamiento que surgían cuando se analizaron las producciones de los alumnos, las posibles preguntas que emergían de ese análisis con el fin de registrarlas para tenerlas disponibles para cada estudiante. Hay que tener en cuenta que los estudiantes a los que se les realizaron las entrevistas eran representantes de categorías de producción escrita que la investigadora venía construyendo.

De igual modo en la bitácora se registraron los diálogos e intercambios que se realizaron con dos profesoras expertas del área de Matemática de los IINN de Montevideo, con el fin de triangular las categorías construidas por la investigadora para asegurar la credibilidad de lo realizado. Estos intercambios se registran en el próximo capítulo.

## 4.5- Recogida de información

A partir de la recogida de las producciones escritas de los estudiantes se comienza con el análisis de las mismas en dos niveles: uso de registros de representación y tipo de pruebas usados por los estudiantes.

Se describe también el ambiente en que se realizó la recogida de información de los textos matemáticos. En esta descripción se tiene en cuenta: las condiciones de los alumnos estudiados, los materiales usados, en qué momento se llevó a cabo el estudio. El fin de estas especificaciones es que el lector pueda preguntarse por la transferencia de este estudio a otros contextos similares (Sampieri, 2016).

Como ya se dijo, se realizaron 10 entrevistas a estudiantes considerados como representativos de escrituras donde se observaron cambios de registros al resolver la actividad y fundamentar lo realizado. Estos cambios se observaron tanto para la resolución como para validar lo hecho.

## 4.6- Proceso por el cual se asegura la calidad, confiabilidad y validez del estudio

Con el fin de asegurar la calidad y confiabilidad de la investigación se realizó un proceso de triangulación y cristalización de las fuentes de análisis (Santaella, 2006). El objeto de análisis fueron las producciones de textos de los estudiantes, que se contrastaron con las posiciones teóricas asumidas en la presente investigación.

También se realizaron entrevistas a aquellos estudiantes cuyos textos evidenciaron en la resolución de un mismo problema, cambios en el uso de distintos registros de representaciones semióticas en su escritura. Estas entrevistas tuvieron como finalidad confrontar lo escrito con lo pensado por el estudiante, para de este modo recoger insumos de la función epistémica del escribir.

A su vez, estas entrevistas arrojaron información pertinente cuyo objetivo fue indagar de primera mano los motivos de estas transformaciones, con el fin de garantizar la credibilidad del estudio. Estas entrevistas funcionaron a modo de **auditoría interna** de la investigación.

Por otro lado, para continuar garantizando la credibilidad de la investigación se realizó un encuentro con colegas calificadas[8] con el fin de confrontar lo que se había encontrado e interpretado. Esta reunión funcionó como **auditoría externa del estudio** con el fin de garantizar la credibilidad del mismo (Sampieri, 2016).

Para la auditoría externa se realizó una reunión de trabajo donde se les presenta a las dos colegas calificadas las producciones escritas de los alumnos que aparecen en el cuadro 6. Las producciones que se les ofreció estaban analizadas y categorizadas por la investigadora, pero ellas no sabían cómo y porqué se habían categorizado de esa manera.

[8] Cuando se dice docentes calificados se refiere a docentes efectivas en los IINN de Montevideo en el área de Matemática y con una antigüedad mayor a 15 años de trabajo acreditado, no solo en docencia directa sino en estudios realizados.

Es así que se les presenta conjuntamente las producciones y las categorías de análisis de manera separada solicitándoles que en forma individual las estudiaran y las ubicaran en alguna de las categorías ofrecidas. Si alguna de las producciones no era plausible de ser ubicadas en ellas se les solicitó que dijesen qué categoría crearían y porqué.

Posteriormente al trabajo individual se colectivizaron los resultados de esa categorización confrontando lo que cada colega había decidido con lo que la investigadora había producido. En todo momento se presentaron argumentaciones sobre lo realizado.

Entre las categorías que se les presentó, se ofreció una nueva categoría construida a partir de este estudio, por las restricciones que mostraba el marco teórico a la luz del análisis producido en relación a las pruebas matemáticas: la referida a pruebas intermedias. La nueva categoría que se construyó tuvo por finalidad alojar algunas producciones que no tenían cabida en las del marco teórico de referencia (Balacheff, 2000). El objetivo fue confrontar si las categorías que se construyeron y la ubicación de estas producciones fueron fundadamente coherentes. En el capítulo 5 donde se analiza la información se detallará lo sucedido.

**En síntesis**

En relación a la **confiabilidad, credibilidad y la validez** del estudio se llevó a cabo un proceso de triangulación y cristalización usando las informaciones que emergieron del análisis de los documentos producidos por los estudiantes y las entrevistas realizadas. También se confrontaron las categorías armadas por la investigadora con docentes con experiencia en el área con el fin de poner a discusión las mismas. Este proceso tuvo como contexto de referencia el marco conceptual y los antecedentes elegidos.

# 5. Análisis de la información

## 5.1- Descripción de la recogida de la información

La recogida de información se produjo en distintas etapas. En un primer momento fue la selección de los grupos en donde se iba a llevar a cabo el estudio. Esto fue justificado en el apartado 4.3 del capítulo de Metodología.

En un segundo momento se diseñó una situación matemática con la que se recogió la información. Se tuvo en cuenta para el diseño varios elementos que se describieron en el punto 4.4 con el fin de que este instrumento pudiese garantizar la recogida de información.

El tercer momento fue la aplicación de la situación matemática en los grupos de Matemática I y II seleccionados. En ambos grupos se garantizó tiempo suficiente para que los estudiantes pudiesen resolver el problema, pensar la escritura, revisarla y producir validaciones de lo hecho. Para esta tarea se destinaron aproximadamente 45 minutos en cada grupo. El ambiente fue distendido, se enmarcó la actividad de resolución del problema por parte del docente y de la investigadora, creando así un ambiente de bajo riesgo para que las producciones fueran de la mejor calidad posible. Es decir que cada estudiante pudiera, desde el estado de sus conocimientos, explicitar todo lo que sabía en relación al problema planteado para producir una escritura.

El cuarto momento, fue la descripción, análisis y categorización de las producciones de los estudiantes. En la quinta etapa se puso el centro en la selección de aquellas producciones donde se reflejaban cambios de registros en las representaciones durante la escritura.

En sexto momento, fue realizar las entrevistas a los estudiantes seleccionados para poder confrontar de primera mano nuestra interpretación con la voz del estudiante con el fin de corroborar nuestras hipótesis o bien refutarlas. La idea fue poder contar con una auditoría interna (Sampieri, 2016) con el fin de garantizar la credibilidad del estudio y avanzar en las hipótesis de la investigación. Estas entrevistas se realizaron en un salón preparado para tener la privacidad suficiente para el desarrollo de las mismas. En general cada una tuvo una duración en promedio de 8 minutos.

En la séptima fase, se realizaron las desgrabaciones y se volvió sobre el análisis de las producciones que correspondían a las entrevistas realizadas para confrontar con las categorías iniciales. A continuación, se describe, analiza y categoriza fundadamente lo encontrado.

Por último, en la octava fase se convocó a dos colegas expertas en el área para contrastar su juicio sobre la categorización de las producciones escritas con las realizadas por la investigadora.

## 5.2- Categorías construidas a partir de las producciones escritas

Las categorías que se describen a continuación tienen relación teórica con los tipos de registros usados por los alumnos y por las distintas formas de producir pruebas para validar la resolución realizada.

Con el fin de caracterizar las producciones escritas de los estudiantes, se utiliza la categorización de los distintos registros de representación semióticas que hace Duval (2006a), se establecen relaciones con los tipos de pruebas, que los alumnos usaron, según Balacheff (2000).

Se ha construido para tal fin el cuadro 6 donde se explicitan los cruces con las dos dimensiones a estudiar y los indicadores correspondientes:

- Registro de representación semiótica y
- Prueba producida

Las producciones que se eligieron para poner en la tabla funcionan como ejemplos de esas categorías. Obviamente no son las únicas encontradas de ese tipo, sino que se presentan con el fin de ejemplificar y profundizar el análisis dentro de cada categoría.

| | | TIPO DE PRUEBAS PRODUCIDAS | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Pragmáticas** | **Intermedias** | **Intelectuales** |
| REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA | **Lenguaje Natural** | A10[9] A16, A15, A6 | A14, A18, A20 | A1, A19 |
| | **Aritmético** | A10 | A14, A18, A20 | |
| | **Algebraico** | | A10, A14 | A1, A19 |

*Cuadro 6- Categorías construidas*

### 5.2.1- Construcción de una nueva categoría

Se ha confeccionado la categoría llamada "**Pruebas Intermedias**" con el fin de identificar aquellas que no son intelectuales ni empíricas propiamente dichas. En estos casos los estudiantes usaron ejemplos genéricos, es decir, pusieron en juego distintos tipos de números, donde estos no solo representan esos números, sino que estarían "funcionando" como casos de generalización. Estas producciones aún no están para ser consideradas como pruebas intelectuales (Balacheff, 2000) pero se evidencian rasgos que ya no las alojan como pruebas pragmáticas. Esto se describe detalladamente más adelante cuando se realiza el análisis de esta categoría con los distintos tipos de registros que usaron los estudiantes, ejemplificándolos.

### 5.2.2- Comentarios generales sobre el análisis de la información

En todas las producciones escritas se observó el uso de más de un registro de representación, es decir que en su totalidad se evidenciaron transformaciones de tratamiento y/o conversión, al decir de Duval (2006). Los tipos de registros encontrados se mezclan y en general van produciéndose conversiones, es decir cambian de un tipo de registro a otro, no se mantienen dentro del mismo registro. En ese sentido, algunos estudiantes comienzan escribiendo a través del uso de registros aritméticos y luego escriben en lenguaje natural. En otros casos el primer tipo de registro que aparece es el

[9] A10, A16, A15, A6, A14,…etc. representan los alumnos dentro de las categorías confeccionadas.

lenguaje natural y más tarde transforman las escrituras usando registro algebraico y/o aritmético. Pocas veces aparecen conversiones del registro aritmético, al algebraico y luego al lenguaje natural y recíprocamente.

**Se ha evidenciado que es el lenguaje natural el que va conectando las trasformaciones de los distintos registros**. Esto podría significar que el uso del lenguaje natural es el que oficia como nexo, explicitando lo hecho aritmética o algebraicamente.

De las 39 producciones escritas solo en dos casos se encontró predominancia neta de lenguaje natural, haciendo referencia a los ejemplos en registro aritmético de manera colateral. En ninguno de estos dos casos las producciones de pruebas fueron del tipo intelectual.

Como ya se dijo el registro de representación semiótico que apareció en todas las producciones, fue el de lenguaje natural. Le sigue en número el uso del registro aritmético - numérico, cargado en general de casos concretos usando números arábigos convencionales. Un ejemplo de caso muy común encontrado es el que se evidencia en la siguiente escritura, cuando se considera la suma de tres números impares consecutivos donde se mezcla el lenguaje natural con el registro aritmético:

"*1+ 3+ 5 = 9 y 9 es un número múltiplo de 3*".

Por último, el menos utilizado fue el registro algebraico. Esta constatación permite avizorar posibles explicaciones en relación a la escasa producción encontrada sobre producciones de pruebas intelectuales. Éstas fueron las pruebas menos producidas.

Como se sabe para producir en matemática una prueba intelectual es necesario un lenguaje impersonal, atemporal, donde los objetos que se usen sean los que plantea la situación, pero ubicándolos en un grado de generalidad tal, que cumplan siempre las condiciones bajo las cuales la actividad lo exige (Balacheff, 2000). Al ser el registro algebraico el menos encontrado, la prueba intelectual típica de la matemática, que es la demostración, aparece en muy pocas producciones. En algunos casos se las ha encontrado ligadas solamente al lenguaje natural y otras vinculando el lenguaje natural combinado con el uso del registro algebraico.

### 5.2.3- Análisis de los huecos del cuadro 6

Como el lector podrá observar en el cuadro 6, aparecen dos espacios sin ejemplos. Estos huecos corresponden al cruce de utilización de registros algebraicos en la producción de pruebas pragmáticas y el uso de registro aritmético para la producción de pruebas intelectuales. No se encontraron producciones con esas características lo que lleva a pensar una hipótesis lógica. Si el estudiante produce una prueba pragmática, pegada a ejemplos, a casos concretos con un lenguaje personal, ubicado en una situación concreta de acción, no necesita el registro algebraico. Puesto que el uso del registro algebraico produce un pensamiento general, tratando de despegarse de ejemplos concretos para establecer trazas de validez que bajo las circunstancias del problema sirvan para todos los casos. Por eso es que ha parecido lógico que no hubiese producciones escritas de este tipo.

El segundo cuadro en donde no se encontraron producciones escritas fue el correspondiente al uso de registro aritmético para producir pruebas intelectuales. De algún modo sería el opuesto del anterior. Para producir una prueba intelectual es necesario lograr un grado de generalización basado en el uso de propiedades que se expliciten, en un lenguaje impersonal y en condiciones de atemporalidad, es decir sin usar ejemplos concretos. El registro aritmético para la resolución de este problema utiliza números concretos aunque funcionan de manera general. Será necesario despegarse de este registro para poder lograr una prueba intelectual pura. Por lo tanto, no encontrar producción escrita para este cruce de los indicadores de las dimensiones tiene lógica.

## 5.3- Descripciones y caracterizaciones específicas

### 5.3.1- Prueba pragmática e intermedia con escrituras en lenguaje natural, aritmético y algebraico

La producción (A10) es un ejemplo típico donde se identifican los registros en lenguaje natural, aritmético y algebraico. Sin embargo, la validación que presenta es sumamente escasa. Se observa en la imagen de la figura 1, que el estudiante utiliza sentencias del tipo "siempre que sumas…" pero no las valida o da por hecho que lo que escribe con ejemplos numéricos funciona como una validación o prueba de lo que afirma.

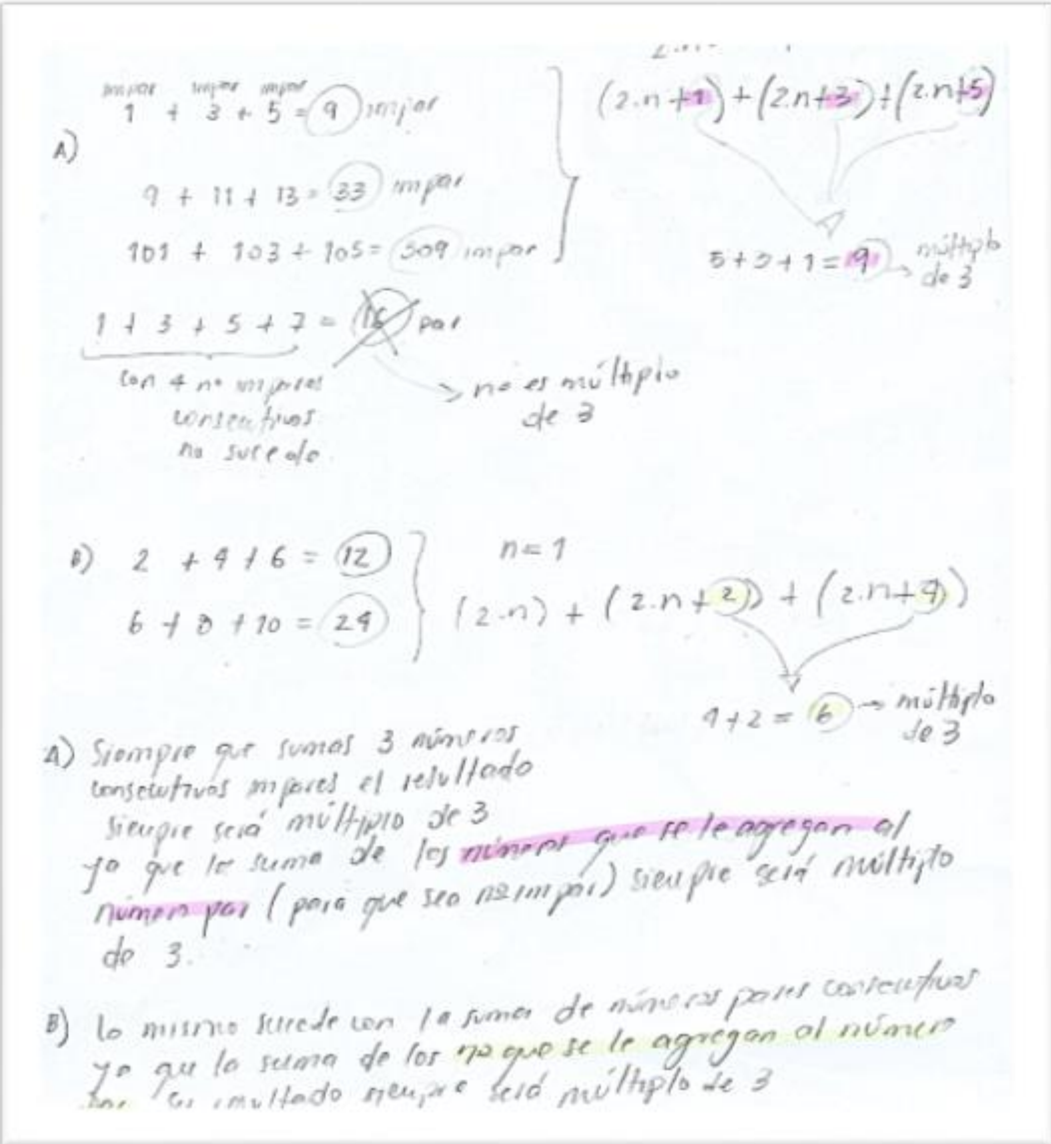



*Figura 1- Producción A10*

Como se observa en la Figura 1, para ejemplificar, A10 comienza con sumas de números consecutivos "bajos" tanto de impares como pares. Luego en la suma de consecutivos impares amplía el dominio presentado y muestra

"*101 + 103 + 105= 309*"

Esta escritura podría estar funcionando como uno de los ejemplos genéricos para intentar expresar de alguna manera, que no importa qué números se elijan porque siempre la suma de tres impares consecutivos es múltiplo de 3. Hay un puente con el registro algebraico donde A10e xplicita que[10]

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n+ 5)$$

Marca los naturales 5+ 3 + 1 = 9, expresando que este último es múltiplo de 3.

En la parte A) de la respuesta vuelve a explicitar la misma idea que utilizó en lenguaje algebraico, pero ahora escrito en lenguaje natural. Expresa que alcanza con lo que se suma para que sean impares y que por esa razón el resultado de esa suma es un múltiplo de 3, registrándolo de la siguiente manera: "*siempre será múltiplo de 3*".

Parecería que A10 supone que es suficiente con lo que se les suma a los números pares (tres sumandos 2n) para que sea múltiplo de 3, pero no dice como es el resultado de la suma de esos otros tres sumandos pares. Se podría pensar que lo da por hecho o solo considera que se debe focalizar en lo que agrega a esos números pares con el fin de saber si la suma es o no, múltiplo de 3.

Como se puede observar en el análisis de la escritura no hay una producción de una prueba intelectual, se estaría frente a un ejemplo de prueba "intermedia". En lo escrito por el estudiante se observaría una aproximación a una posible prueba intelectual en la que aún faltan fundamentaciones usando propiedades. Por ahora a estas propiedades las está utilizando en acto, sin explicitarlas. Surge así una posible interrogante en relación a si el estudiante da por hecho esta circunstancia porque la ve redundante y no es necesario

[10] La marca con color es de la producción del estudiante, ver figura 1.

explicitarla en su escritura, o aún no ha podido establecer lo que significa producir una prueba en Matemática.

Al realizar la entrevista a este estudiante se pudo comprobar que su producción escrita tiene según su parecer “todo lo exigido” sin ver aún los huecos en el desarrollo de su argumentación. A continuación, se transcribe un fragmento de esta entrevista[11].

> *I: ¿Por qué te pareció suficiente con lo que escribiste para fundamentar lo hecho?*
> *A10: Puse ejemplos para darme cuenta, luego escribí con letras y después expliqué con palabras.*
> *I: ¿Eso es lo que haces siempre para decir porqué en matemática?*
> *A10: Sí, siempre que leo algunas cosas de matemática aparece así: ejemplos, algo escrito con letras y cosas parecidas a conclusiones.*

Sin duda A10 está en la búsqueda de regularidades para saber cuándo algo “está probado o no”, ha identificado “las partes” que el alumno nombra, pero no ha construido aún las conexiones lógicas que fundamentan el uso de “esas partes” que el identificó dentro de un texto matemático. El estudiante se concentra en lo que considera “cumplir” con una formalización que ha detectado en los libros de matemática que ha leído, en su historia como alumno de matemática cuando tiene que resolver un problema y decir porqué hizo lo que hizo. Todavía en A10 están en transición las fundamentaciones que permiten el avance a la prueba intelectual.

**En relación a las justificaciones este es un ejemplo de producción de un texto donde la forma de lo escrito es más importante que el significado de lo producido.**

[11] I, representa el investigador y A10, al alumno.

### 5.3.2- Prueba intermedia con escrituras en lenguaje natural, aritmético y algebraico

Algunas producciones como las A14, A18 y A20 se asemejan al tipo de prueba intermedia que produjeron los estudiantes usando lenguaje natural y registro aritmético. Sin embargo la producción de A14 muestra un desarrollo mayor que las producciones de A18 y A20 porque intenta escribir en registro algebraico con el fin de generalizar lo encontrado.

Por otro lado, estas tres producciones se asemejan en la regularidad encontrada a la hora de la búsqueda de la solución. Exploran y visualizan que el sumando "del medio" multiplicado por 3 da el resultado de esa suma, tanto en el caso de números impares como de pares. Parecería que se apoyan en esta constatación para comenzar a producir sus pruebas porque están garantizando de alguna manera que "*si la suma es siempre el del medio x 3, entonces el resultado siempre es múltiplo de 3*".

La figura 2 muestra la producción de A18.

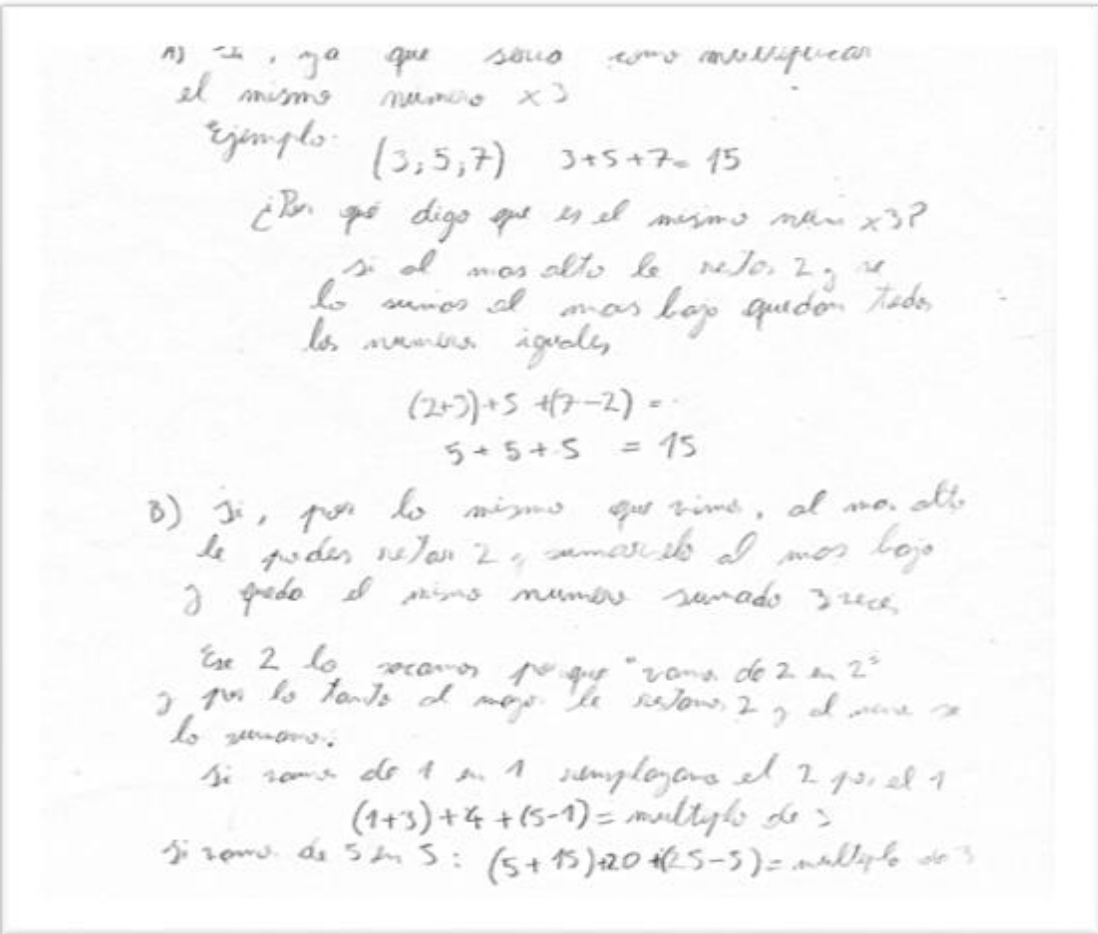

A) Si, ya que seria como multiplicar el mismo numero x 3
Ejemplo: (3; 5; 7) 3+5+7=15
¿Por qué digo que es el mismo num x3?
si al mas alto le resto 2 y se lo sumo al mas bajo quedan todos los numeros iguales
(2+3)+5+(7−2) =
5+5+5 = 15
B) Si, por lo mismo que vimos, al mas alto le podes restar 2 y sumarselo al mas bajo y queda el mismo numero sumado 3 veces.
Ese 2 lo sacamos porque "vamos de 2 en 2" y por lo tanto al mayor le restamos 2 y al menor se lo sumamos.
Si vamos de 1 en 1 remplazamos el 2 por el 1
(1+3)+4+(5−1) = multiplo de 3
Si vamos de 5 en 5: (5+15)+20+(25−5) = multiplo de 3

*Figura 2- Producción A18*

Cuando se le pregunta si lo que afirma de Ana es verdadero: "siempre que suma tres números impares consecutivos el resultado es un número múltiplo de 3"; la respuesta para la parte es "*Sí, ya que sería como multiplicar el mismo número por 3".* Luego escribe un ejemplo y se pregunta, "porqué digo…" con la intención de producir la justificación. Habla de números "altos" y "bajos", aludiendo al mayor y al menor número considerado en la suma de tres impares o pares consecutivos. Da por hecho que un número será múltiplo de 3 si se puede escribir como un "*número x 3*", y nunca nombra la definición de múltiplo de 3 como para apoyarse, directamente la pone en juego.

Tanto A14, como A18 y A20 buscan una suma equivalente a la planteada en la actividad. Transforman la suma de tres impares o pares consecutivos en "*el del medio x 3".*

La producción de A20 expresa que "*un número es múltiplo de 3 si la suma de todas sus cifras es múltiplo de 3*". Utiliza un criterio de divisibilidad por 3 para validar lo que encuentra en casos particulares, pero los hace funcionar como casos genéricos al aumentar el dominio numérico de los ejemplos. Por esta razón se puede sostener que la prueba que intenta producir para validar lo hecho es del tipo intermedia. A20 lo expresa así:

> "*Ocurre que, si yo sumo tres números impares consecutivos o pares consecutivos, en realidad es como si estuviera multiplicando el del medio (ejemplo 122*[12]*) por 3. Por tanto, el resultado de multiplicar un número por 3 nos da un múltiplo de 3."*

Fundamenta expresando lo que encuentra con ejemplos numéricos generales, pero no prueba que pasa con los casos generales. Se puede interpretar que aún no tiene necesidad de generalizar esa escritura y transformarla en algebraica con el fin de poder dar el salto para intentar producir una prueba intelectual. No es suficiente para la matemática probar con el 122 como caso genérico. Necesitaría escribir en algún registro el caso general para

[12] A20 escribe el ejemplo: *120 + 122 + 124 = 366, 366 es múltiplo de 3, 122 x 3 = 366*

poder probar que se cumple siempre bajo las condiciones del problema, explicitando las propiedades necesarias.

Volviendo a la escritura de A18, se observa un intento de generalización en cuanto a lo que se suma o se resta, de acuerdo al número "*más bajo o más alto*". Expresa que:

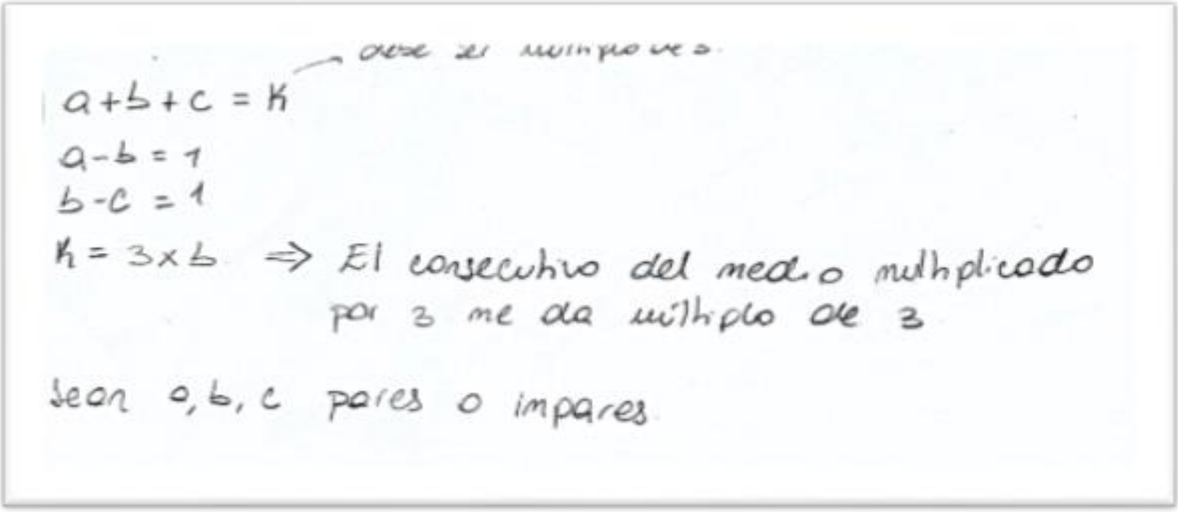
> *"si sumo de 1 en 1 reemplazamos el 2 por el 1* y escribe para ello un ejemplo*: "(1+3) + 4+ (5-1) = múltiplo de 3".*

En otros términos, se puede interpretar que está considerando la suma de tres números cualesquiera consecutivos. Como "van de 1 en 1", suma y resta 1 convenientemente a los números que considera como extremos de los tres elegidos. Lo mismo hace si van de "*5 en 5*".

También sobre la producción de A18 se puede pensar que por un lado se apartó de lo exigido para la resolución de la situación matemática (suma de a 5, esto no se pedía en el problema). Por otro lado, sigue pensando que con ejemplos genéricos puede probar y que siempre esa afirmación es cierta. Como tercer aspecto avanza preguntándose qué sucedería si en vez de sumar tres números pares o impares consecutivos fuesen de 5 en 5, ¿la suma siempre sería múltiplo de 3? No lo prueba, pero **comienza un proceso de generalización que lo muestra en su escritura.** Lo expresa de este modo:

> *"Se hace una generalización que dependiendo de la forma en la que contemos (de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, ∞) si tomamos 3 consecutivos y al menor de ellos le sumamos el número que vamos sumando para contar y al mayor de los 3 se lo restamos todos quedan iguales."*

La escritura producida por A14 se muestra en la figura 3. Es uno de los ejemplos dentro de este grupo, el estudiante presenta intentos de generalización a través de una escritura en registro algebraico.



debe ser múltiplo de 3.

$a+b+c = K$

$a-b = 1$

$b-c = 1$

$K = 3 \times b$ ⇒ El consecutivo del medio multiplicado por 3 me da múltiplo de 3

Sean a, b, c pares o impares

*Figura 3- Producción A14*

Utiliza las letras *a, b y c* como representación genérica de números naturales y marca que son tanto pares como impares. Comete un error al considerar que la diferencia entre dos números consecutivos tanto pares como impares es 1, pues la diferencia entre dos consecutivos pares o impares es 2, no 1. Está considerando la idea de diferencia en términos de "cantidad de números entre" y no como la sustracción entre los dos números expresados como *"a-b =1"*. Una posible interpretación de esta escritura es que entre dos pares consecutivos hay un número impar y eso sería lo que podría representar ese 1. La misma explicación podría funcionar si son impares consecutivos. Lo expresa en su producción:

> *"Sumando tres números consecutivos ocurre lo mismo, porque sigue siendo la misma cantidad de números (3) con uno de diferencia entre cada número."*

La producción de A14 permite suponer que para probar lo que está presentando como resolución del problema necesita expresar "*con letras*" lo que ve con números, como forma de escribir que las letras representan cualquier número de ese tipo, tal como lo expresa en "*Sean a, b, c pares o impares*".

**La escritura algebraica podría estar funcionando como puente para comenzar con la producción de pruebas intelectuales, evidenciando de este modo que con ejemplos no es suficiente**.

### 5.3.3- Prueba pragmática con predominio de escrituras en lenguaje natural

Un ejemplo paradigmático de producción de texto matemático con el fin de justificar el valor de verdad de una proposición es el realizado por A16. La escritura de este estudiante funciona como un "ejemplo genérico" de la construcción de las reglas del debate matemático identificadas por Arsac (1992). Se hace referencia a la regla que expresa: "en matemática, no son suficientes algunos ejemplos que verifican un enunciado para probar que es verdadero".

En la producción de A16 se observa, referido a la parte A) del problema propuesto:

> *"Primero busqué una contradicción, un ejemplo en el que no sucediera la generalidad, no encontré. Por lo tanto, tomé como afirmativo lo que Ana plantea"*

Si se estuviera fuera del dominio de la matemática esto podría funcionar, pero en matemática esto no es así. La regla explicitada por Arsac (1987) remite a cuestionar la producción de pruebas pragmáticas que los estudiantes utilizan con mucha frecuencia. Tal como lo explicita A16, al no encontrar ejemplos que contradijesen la proposición, concluye que entonces, ésta es verdadera. Ahora bien, lo buscado son solo ejemplos finitos, no puede controlar todos los casos porque son infinitos, entonces no se posible asegurar a partir del proceso de escritura de A16 que la proposición de Ana sea verdadera.

El registro que usa A16 es solamente lenguaje natural. No presenta en su producción ejemplos numéricos a través del registro aritmético de esos casos en los que se apoya para expresar que la proposición es verdadera. Sin embargo, se puede suponer que los ejemplos en los que se sostiene los escrituró fuera del texto que presentó, para poder establecer la conclusión que propone. Lamentablemente esta acción realizada por A16 es cotidiana a la hora de las producciones de textos escritos en el área de matemática.

**Seguramente esta escritura se basa en un contrato didáctico que propone escribir solo las conclusiones, no mostrar el proceso seguido en la producción de afirmaciones y dejar el texto prolijo de forma pero no de fondo, donde las razones matemáticas no se pueden atrapar**.

El texto de A16 al no presentar los ejemplos que trabajó, impide luego volver sobre si mismo, con el fin de mejorar lo hecho, de pensar lo pensado. Este aspecto señala un asunto con lo que es necesario trabajar para habilitar que las producciones escritas en matemática por parte de los estudiantes comiencen a traslucir lo que se piensa. Es importante dejar por escrito el proceso de pensamiento, aunque tenga errores o esté incompleto o, en palabras de los estudiantes "esté bien o mal". El propósito de registrar por escrito ese proceso es que al volver sobre él se pueda mejorar, ampliar los rangos de acción, para poder construir ideas matemáticas con raíces fuertes.

De igual manera, el texto de A15 tiene características similares al anterior. Salvo tres o cuatro escrituras numéricas el registro predominante es lenguaje natural. Sin embargo, agrega algunas consideraciones en relación a la producción de A16.

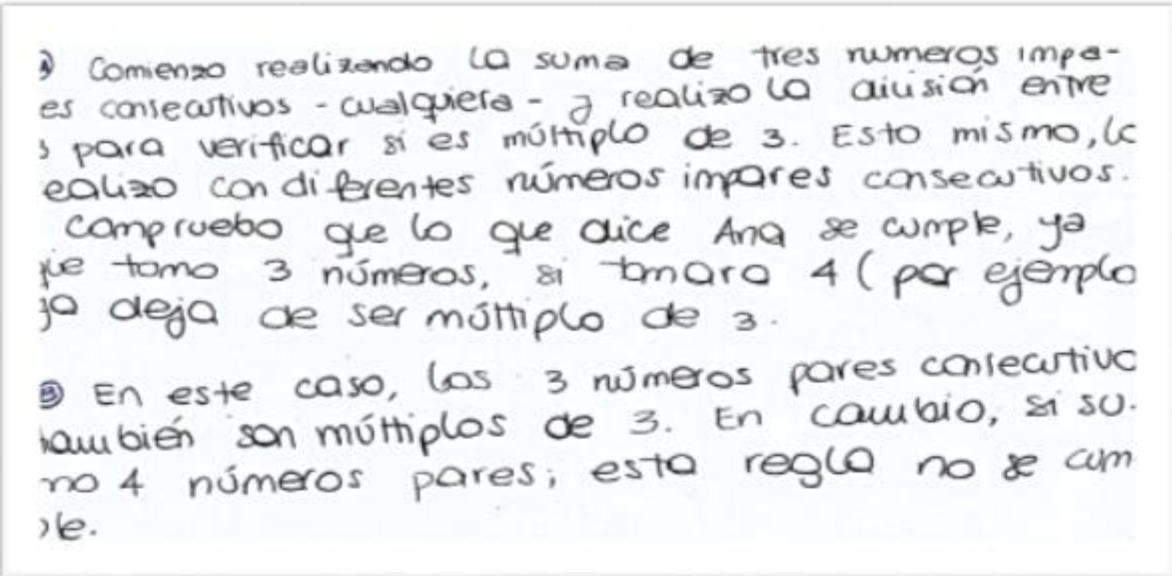

a) Comienzo realizando la suma de tres numeros impa-
es consecutivos - cualquiera - y realizo la división entre
3 para verificar si es múltiplo de 3. Esto mismo, lo
realizo con diferentes números impares consecutivos.
Compruebo que lo que dice Ana se cumple, ya
que tomo 3 números, si tomara 4 (por ejemplo
ya deja de ser múltiplo de 3.
b) En este caso, los 3 números pares consecutivos
también son múltiplos de 3. En cambio, si su-
mo 4 números pares; esta regla no se cum-
ple.

*Figura 4- Producción A15*

En la parte A) del texto de A15 se puede observar, al igual que en el de A16, el relato:

> "*Esto mismo lo realizo con diferentes números impares consecutivos compruebo que lo que dice Ana se cumple ya que tomo 3 números, si tomara 4 (por ejemplo) ya deja de ser múltiplo de 3.*"

Es así que se puede identificar un argumento que en A16 no estaba: la cantidad de sumandos con el fin de encontrar "un caso que no se verifique". A15 cambió las condiciones del problema porque se planteaba el trabajo con tres sumandos, no con cuatro. Quizás introdujo este cambio para analizar cuándo se verifica y cuando no. Seguramente esta exploración lo ayudó a pensar que la cantidad de sumandos asociados tiene alguna relación con el resultado de que la adición sea o no múltiplo de 3. En la escritura no aparece la prueba de esta conjetura, pero hay un indicio de relacionar el número de sumandos pares o impares consecutivos con que el resultado de esa adición sea o no múltiplo de la cantidad de sumandos.

Otro ejemplo dentro de esta categoría es el texto que produjo A6. En relación a la escritura en lenguaje natural A6 relata en la entrevista porqué usa prioritariamente esa forma de registro:

> *I: Vi que usaste mucho el lenguaje natural…, contá un poquito por qué lo usaste, por qué te sirve.*
> *A6: En realidad no me gusta hacer la prueba de si es o no porque después me pierdo…*
> *I: ¿A qué te referís con eso de la prueba, a escribir ¿algebraicamente, con letras?*
> *A6: No sé, en realidad voy pensando lo que estoy haciendo, voy haciendo los pasos, voy explicando porque después tengo que fundamentar lo que vas haciendo y si lo hago separado* (refiriéndose a escribir algebraicamente) *después no sé qué me estaba preguntando…por qué lo hice. Entonces voy pensando y*

*escribo eso: "ahora voy hacer la suma tal y voy viendo…si puede ser o no…"*

*I: Ah! Vas haciendo como un relato de lo que vas pensando, y eso ¿te sirve?*

*A6: Claro! Como un cuentito…. Hago la misma generalización con pares…*

*I: ¿A qué le estás llamando generalización?*

*A6: Ella* (Ana, la del enunciado del problema) *lo que quiere saber si suma tres n° impares pueden ser múltiplo de 3 y lo que quiere hacer es medio una generalización (...) Primero pensé algunas sumas y después te vas dando cuenta que siempre se cumple.*

*I: ¿Cómo te vas dando cuenta de que siempre se cumple?*

*A6: Después lo hice con el 2* (referida a la parte B del problema) *también pasa y si no son consecutivos no pasa y todo así… Eso no sé si lo escribí o lo pensé.*

*I: A ver…* (la investigadora se fija en la producción de A6). *No, no lo escribiste…*

*A6: Voy pensando las diferentes opciones y voy viendo. A veces me es difícil escribir todo, todo lo que voy pensando porque vas pensando más rápido de lo que vas escribiendo… por eso lo del cuentito….*

*I: Ah! El cuentito que vos decís te facilita (...) ¿para qué lo querés?*

*A6: Lo quiero para responder lo que me están preguntando, para que el otro sepa lo que respondo…Acá en magisterio es mucho más difícil. Porque si estás haciendo un ejercicio* (referido a bachillerato) *bueno ya está, lo haces y listo, pero acá te piden que expliques por qué lo estás haciendo así, de qué manera, qué usaste para resolverlo, por qué lo estás haciendo así… Para mí no es tan fácil… escribir y explicar lo que hacés…no es nada fácil…, para mí no es nada fácil. Te piden que expliques…*

A6 plantea varias cuestiones simultáneamente. Por un lado, que en magisterio el contrato didáctico cambió respecto a bachillerato y no es suficiente con “hacer el ejercicio”. Es decir, solamente presentar la solución al problema.

Además aparece, según A6, una exigencia en relación a probar lo que se hace y lo que se dice en matemática, que puede tener a nuestro entender, a partir de lo sucedido en bachillerato, dos opciones:

1) O bien, A6 no identificó esa exigencia de producir pruebas y de ese modo su producción matemática valió, aunque no haya producido justificaciones, o

2) esas producciones, que no identificó claramente, no fueron del mismo nivel de exigencia que en magisterio.

Este hecho podría ser una posible explicación sobre porqué cuesta tanto la producción de pruebas en el nivel de magisterio a pesar de que los estudiantes cuentan como mínimo con 12 años de escolaridad. Según este testimonio parecería que durante los años de bachillerato la relación con la matemática fue “hacer mecánicamente” y que ahora, en su formación profesional aparece una exigencia no reconocida en el hacer matemático: **escribir para producir pruebas.**

En los dichos de este estudiante se observa algo que se puede generalizar en relación a la escritura en matemática, porque expresa con claridad la dificultad de escribir para reflejar lo pensado. A veces “*pensamos más rápido y no lo escribimos*”.

Por otro lado, frente a este requerimiento de probar lo que hace, aparece el lenguaje natural como herramienta. Extremo que podría estar funcionando como proceso incipiente de la importancia de registrar las producciones matemáticas no solo para resolver el problema, sino también para comunicar lo hecho a otro, y además tener el registro como un documento que permite acceder a revisar lo pensado.

En la entrevista también se observó ese juego de “*voy haciendo un cuentito*” refiriéndose a escribir en lenguaje natural como opuesto a usar el registro algebraico. Éste se ve más lejano, un poco inalcanzable, que no refleja todo lo que A6 va pensando. Aún le es ajeno el lenguaje algebraico y como el uso de ese registro se acerca a una escritura impersonal todavía no la puede captar para comunicar lo que A6 va produciendo.

Según Balacheff (2000), esta expresión de "*voy haciendo un cuentito*" sería una forma de exteriorizar el razonamiento llevado a cabo por esta categoría de estudiantes, "*lo que voy pensando*". Para el autor el término razonamiento designa la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida para producir nueva información. Es así que los estudiantes A16, A15 y A6 presentan predominancia de escritura en lenguaje natural como forma de comenzar a producir pruebas matemáticas y "no perder" lo que van pensando.

Una posible interpretación de que el registro algebraico sea usado de manera menos frecuente, aunque es conocido por estos estudiantes, es que no lo vean como utilizable para entrar en el juego de las generalizaciones y de la producción de pruebas. Parecería que encontrar fundamentaciones de por qué se hace lo que se hace, es equivalente a probar con algunos casos numéricos y considerarlos como "generalizaciones". Estaría en el pensamiento de estos alumnos que sería suficiente con probar un número de casos finitos para demostrar la validez de una proposición.

**En esta categoría el lenguaje natural sería el registro que permite la entrada a la producción pruebas matemáticas. Se puede sostener a partir de este estudio que si se exige el salto a otro tipo de registro sería posible que estos alumnos no entraran en ese juego imprescindible para las construcciones de pruebas matemáticas.**

### 5.3.4- Pruebas intelectuales utilizando lenguaje natural y registro algebraico

Los ejemplos de producciones que se eligieron como representativas de esta categoría corresponden a los estudiantes A1 y A19. Ambos estudiantes usaron lenguaje natural y registro algebraico. Se puede establecer una vinculación entre el uso de estos dos tipos de registros de representación.

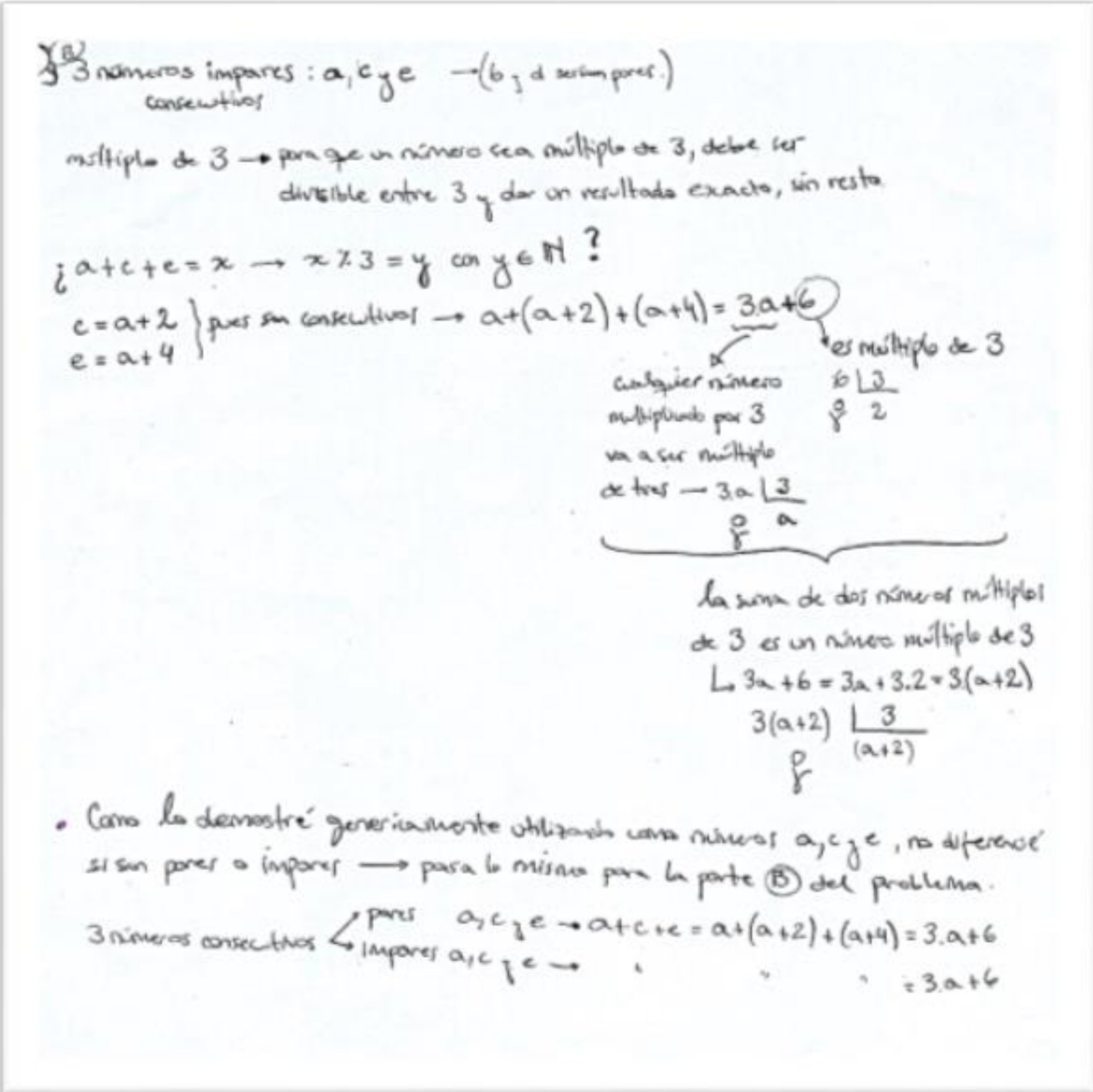
Los alumnos que llegaron a producir pruebas intelectuales combinaron siempre el lenguaje natural y el registro algebraico. **Se ha constatado que no se encontraron producciones de pruebas intelectuales solo con el uso de registro de lenguaje natural**.

A su vez en las pruebas intelectuales encontradas, los estudiantes usaron escrituras en registro algebraico y lenguaje natural. Ninguna fue "pura", es decir en un solo registro de representación. Se evidenció en esta categoría la conversión que expresa Duval (2006) en las transformaciones de cambios de registros, en este caso de lenguaje natural a registro algebraico y viceversa.

La diferencia entre la producción escrita de A1 y A19 se basa en que A1 utilizó la escritura algébrica para representar números naturales sin distinguir si son pares o impares. Además, vuelve a escribir de manera equivalente en lenguaje natural para justificar por qué hizo lo que hizo. Es decir, va y viene entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico. Esta última es una característica común de ambas producciones: escribir en registro algebraico y luego sostener lo escrito transformándolo a lenguaje natural.

P**arecería que el registro algebraico no convenciera a estos alumnos de que es suficiente para producir la prueba pedida y entonces lo "refuerzan" con lenguaje natural.**

La figura 5 muestra la producción completa de A1. Donde se evidencia lo explicitado anteriormente.



b) 3 números impares : a, c y e —(b y d serían pares.)
consecutivos

múltiplo de 3 → para que un número sea múltiplo de 3, debe ser divisible entre 3 y dar un resultado exacto, sin resto

¿ $a+c+e=x \rightarrow x \% 3 = y$ con $y \in \mathbb{N}$ ?

$c=a+2$ } pues son consecutivos → $a+(a+2)+(a+4) = 3a+6$
$e=a+4$

cualquier número multiplicado por 3 va a ser múltiplo de tres — 3a |3
0 a

es múltiplo de 3
6 |3
0 2

la suma de dos números múltiplos de 3 es un número múltiplo de 3
↳ $3a+6 = 3a+3.2 = 3(a+2)$
3(a+2) |3
0 (a+2)

• Como lo demostré genéricamente utilizando como números a, c y e, no diferencié si son pares o impares → para lo mismo para la parte B del problema.

3 números consecutivos
pares a, c y e → $a+c+e = a+(a+2)+(a+4) = 3.a+6$
impares a, c y e → " " " $= 3.a+6$

*Figura 5- Producción A1*

La escritura de A1 es completa matemáticamente y muestra, según Duval (2006), dos transformaciones en lo referente a los registros de representación semiótica usados. En este caso hay una conversión pues son dos registros de distinto tipo. Los distintos registros usados: lenguaje natural (discursivo) y registro algebraico.

Aparece también un registro aritmético mínimo cuando plantea la división 6 entre 3. Después utiliza siempre el lenguaje algebraico para afirmar lo planteado a través del lenguaje natural y recíprocamente.

Durante la entrevista realizada a A1, expresa lo siguiente:

> *I: Vos decís "como lo demostraste genéricamente" y que es lo mismo hacerlo con pares que con impares, a ver contanos un poquito qué querés decir con eso.*
>
> *A1: Yo usé letras para demostrarlo que se pueden sustituir por números pares o por números impares.*
>
> *I: ¿Cómo sabés eso?*
>
> *A1: Porque los números son consecutivos, es uno sí y uno no, entonces no importa si son pares o impares (...) Lo hago mentalmente (...). Si yo digo que "a es par" y le sumo 1 no me queda par, sino que me va a quedar impar y yo estoy buscando los consecutivos pares. Lo mismo con impares. Si yo pongo que (a) es impar y pongo (a + 1), éste va a ser par y yo quiero los impares consecutivos por eso pongo (a+ 2).*

El relato de A1 muestra que, aunque no pruebe lo que dice, usa en acto algunas propiedades que maneja sobre el efecto sumar 1 o 2, a números pares o impares. Lo hace de manera general llamando *"a"* a cualquier número natural tanto par como impar. Controla muy bien la idea de pares o impares consecutivos por eso adiciona siempre 2 y no 1 y lo expresa en la entrevista.

> *I: Acá hiciste esta "cuenta parada", ¿te acordás porqué lo hiciste?*
>
> *A1: Lo usé para que me quedara más claro. Primero pensé los datos que tengo. Tienen que ser 3 números impares consecutivos y tiene que ser múltiplo de 3 y tienen que ser divisible entre 3. Después fui relacionando los datos.*

En el diálogo anterior queda representado como los distintos cambios de registros de representación son usados por los estudiantes para "*tenerlo más claro*". No son elegidos al azar, sino que van configurando un texto que los ayuda a producir algunas justificaciones. La elección del registro de representación para escribir no es ingenua, depende de los conocimientos que manejan y “que tan claro” lo van “viendo”. Es así que A1 expresa que “*después fui relacionando los datos*”, es decir que una idea lleva a la otra y trata de escribirlo de manera que se trasluzcan esas relaciones.

> *I: A veces escribís con lenguaje natural y otras con letras* (indicando la escritura algebraica), *¿por qué te sirve el cambio?*
> *A6: En realidad cuando lo escribo con palabras es como lo estuviera pensando y después lo escribo con letras lo paso a lenguaje más técnico, más matemático.*

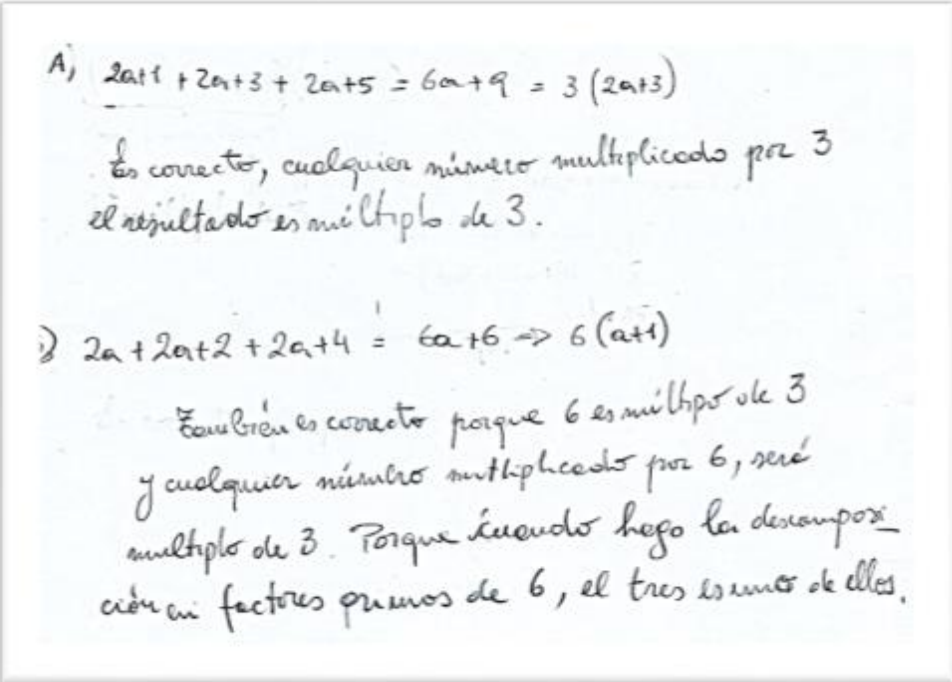
La entrevista acerca información sobre un elemento que  se venía constatando, el uso del lenguaje natural como facilitador de exteriorizar lo que se piensa, para luego poder expresarlo *“en un lenguaje más técnico, más matemático”*. En palabras de Balacheff (2000), podría ser en un lenguaje más impersonal, destemporalizado y genérico.

Entre la entrevista y la producción de A1, se puede afirmar que el registro algebraico “*se ve más matemático*”, y además permite producir pruebas de otro tipo, en este caso pruebas intelectuales. El lenguaje natural estaría funcionando como un conductor y organizador del pensamiento para comunicar a otro y a sí mismo lo hecho y para volver sobre ello.

En la producción de A19 se observan escrituras algebraicas acompañadas de escrituras en lenguaje natural. Éstas últimas operando como una forma de “aclarar y reforzar” lo escrito algebraicamente. Se diría que las justificaciones de por qué las expresiones son “iguales” lo hace utilizando un registro discursivo en lenguaje natural.

En esta producción aparece un argumento que vincula la idea de múltiplo, con la definición de múltiplo y con la necesidad de que hay algunos números que se llaman primos que ayudan a analizar a los “otros números”.

En este caso, a diferencia de la producción de A1, la escritura algebraica muestra la diferencia entre pares e impares, sin especificar quien es $a$. Da por hecho que $a$ representa un número natural cualquiera.



A) $2a+1 + 2a+3 + 2a+5 = 6a+9 = 3(2a+3)$

Es correcto, cualquier número multiplicado por 3 el resultado es múltiplo de 3.

B) $2a + 2a+2 + 2a+4 = 6a+6 \Rightarrow 6(a+1)$

También es correcto porque 6 es múltiplo de 3 y cualquier número multiplicado por 6, será múltiplo de 3. Porque cuando hago la descomposición en factores primos de 6, el tres es uno de ellos.

*Figura 6- Producción A19*

En esta categoría se puede observar que **el lenguaje natural funciona como vehículo para luego escribir utilizando registro algebraico con el fin de producir una prueba intelectual según la categoría de Balacheff (2000). La idea del uso del lenguaje natural parecería ser la de complementar y "aclarar" lo expresado algebraicamente**. El **lenguaje natural aparece como un medio de entrada o apoyo de lo pensado.**

Todas las pruebas intelectuales encontradas en este estudio estuvieron escritas en registro algebraico acompañado de lenguaje natural.

Esta constatación habilita a preguntarnos: **¿qué espacios y qué tiempo se destina en las aulas donde se enseña matemática a discutir cuestiones de la escritura matemática y de los distintos tipos de registros que se van usando?**

## 5.4- Análisis de los resultados de la auditoría externa

Como ya se dijo en el capítulo 4 se llevó a cabo un proceso de auditoría externa para garantizar la credibilidad del estudio. En este apartado se realiza el análisis de los resultados de ese proceso.

A dos colegas expertas se les propuso la discusión de 9 producciones escritas representativas de todas las categorías construidas. De esas 9 producciones, resultaron 18 análisis (9 por cada colega) de la que, en 17 hubo absoluta coincidencia de la categorización realizada por la investigadora, así como de las razones ofrecidas. Se coincidió tanto en la categorización de los tipos de registros usados por parte de los estudiantes como en la selección de qué tipo de pruebas se produjo en cada escritura. Tómese como referencia el cuadro 7 de este capítulo relacionado a categorías construidas.

El cuadro 7 es comparativo y se presenta con el fin de ilustrar las categorizaciones realizadas por parte de las dos colegas y la investigadora. El foco estuvo en el tipo de pruebas realizadas por los estudiantes. En los tipos de registros de representación usados por los alumnos hubo total acuerdo.

| Producción | Colega 1 | Colega 2 | Investigadora |
|---|---|---|---|
| A20 | Intermedia | Intermedia | Intermedia |
| A18 | Intermedia | Intermedia | Intermedia |
| A14 | Intermedia | Intermedia | Intermedia |
| A1 | Intelectual | Intelectual | Intelectual |
| A6 | Pragmática | Pragmática | Pragmática |
| A19 | Intelectual | Intelectual | Intelectual |
| A10 | Intelectual | Intermedia | Intermedia |
| A16 | Pragmática | Pragmática | Pragmática |
| A15 | Pragmática | Pragmática | Pragmática |

*Cuadro 7- Comparación: resultado de la auditoría externa*

Por lo tanto, es posible afirmar que hay acuerdo en relación a la credibilidad del estudio a partir del proceso realizado con todos los criterios que se han aplicado para su confiabilidad, credibilidad y validez.

# 6. Conclusiones y nuevas preguntas

## Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación y algunas preguntas a las que se arriba a partir de este estudio. Las preguntas y las conclusiones se listan en un orden que no es necesariamente jerárquico. Algunas de las conclusiones que se presentan están en relación a los tipos de registros de representaciones usadas por los estudiantes al producir un texto escrito, otras en relación al tipo de pruebas usadas y finalmente algunas en relación a las dos dimensiones anteriores vinculadas.

En un primer momento se puede constatar que existe relación entre el tipo de prueba producida y el tipo de registro de representación usada. **Según sea el tipo de pruebas que se producen son los tipos de escrituras que usaron los estudiantes y recíprocamente**. Por ejemplo, no se evidenciaron registros de representación algebraica cuando se producen pruebas pragmáticas.

En general, si se producen pruebas pragmáticas los registros que aparecen son: el discursivo (lenguaje natural) y el registro aritmético usando símbolos convencionales para números naturales.

En todas las producciones se observó la presencia del lenguaje natural sin discriminar el tipo de pruebas que se produjeron. Es decir que **el uso del lenguaje natural ha sido determinante en las producciones escritas.**

Las justificaciones del uso del lenguaje natural fueron explicitadas por los estudiantes. Al escuchar su voz ellos fundamentan que **les parece que el uso por escrito del lenguaje natural muestra más claramente lo que están pensando**. **Reconocen más las justificaciones producidas cuando estas están escritas usando el lenguaje natural**. Lo expresan en términos de “*hago un cuentito*”.

En relación a las pruebas intelectuales aparecen el registro discursivo (lenguaje natural) y el registro de representación algebraico. Se puede vincular entonces que no se encuentran producciones escritas de pruebas intelectuales solo con el uso de registro de lenguaje natural.

Es así que **el lenguaje natural estaría funcionando como vehículo para luego escribir con registro algebraico con el fin de producir una prueba intelectual** según la categoría de Balacheff (2000). **La idea del uso del lenguaje natural parecería ser la de complementar y "aclarar" lo expresado algebraicamente**. En algún punto solo el uso del registro algebraico no convenció a estos alumnos de su alcance para producir la prueba pedida.

Cuando surgen **las pruebas denominadas intermedias aparecen tanto el registro aritmético, y el lenguaje natural combinado en ocasiones con algo de escritura algebraica**.

A partir de este estudio se constata la importancia de **habilitar en las aulas durante la enseñanza de la matemática, la escritura en lenguaje natural como vehículo para la producción de pruebas**. Es así que el lenguaje natural estaría funcionando con el fin de poder atrapar lo que van razonando los estudiantes y para de este modo revisar y avanzar en las relaciones matemáticas que ellos van construyendo. Inhabilitar el uso del registro discursivo, en este caso el lenguaje natural, induce a que los estudiantes no profundicen en las conceptualizaciones matemáticas.

Pretender rápidamente que los estudiantes realicen sus escrituras en un lenguaje simbólico matemático parecería que es obstaculizar los niveles de entendimiento, de aprendizaje matemático y que solamente mecanicen algunas ideas. **Conocer la escritura en matemática de los estudiantes posibilita al docente la tarea de enseñanza.**

La escritura es una herramienta que puede llegar a traslucir lo que el estudiante va razonando, conceptualizando y generalizando fundadamente. Sería importante habilitar un espacio en las aulas de matemática para la enseñanza de la escritura en el área para de esta manera favorecer la entrada de los alumnos en el juego matemático.

Por otro lado, la escritura en matemática hace posible desde el aprendizaje, que también se transforme en una herramienta potente para aprender matemática. Promover que los estudiantes revisen sus escrituras para mejorarlas, es un proceso profundo que tiene por objetivo que puedan establecer relaciones entre objetos matemáticos para atraparlos mejor y construir una trama fuerte de ideas matemáticas. La idea es que esta trama sea fuerte pero no rígida, que sea una malla que pueda tejerse y destejerse todas las veces que sea necesario, para que se complejice.

Se ha constatado que cuando en algunas aulas de formación docente se produce un cambio de contrato didáctico éste hace que el estudiante tenga que moverse de lugar. No solo será un alumno que "hace ejercicios", en los que repite ciertas rutinas, sino que se construirá un espacio en el cual sea necesario producir justificaciones donde se evidencie por qué hace lo que hace. Este cambio de contrato pone tanto al estudiante como al docente en otro lugar. Además, el docente necesita moverse en relación a la concepción de matemática que subyace en su práctica. La clase de matemática puede constituirse en un lugar donde se empodere a los estudiantes a establecer razones y no solo rutinas.

## Nuevas preguntas

Algunas interrogantes que surgen a partir de este estudio son:

¿Cómo se puede profundizar desde la enseñanza para establecer el uso del lenguaje natural a la hora de la producción escrita de ideas matemáticas? ¿Qué instrumentos se podrán construir para tal fin?

En ese sentido se podría preguntar si revisar la historia de algunas ideas matemáticas y la forma de su producción, ¿puede ofrecernos pistas de por dónde avanzar en relación a la escritura en clase de matemática?

Por otro lado, sería necesario identificar ¿qué espacio y qué tiempo se destina en las aulas donde se enseña matemática a discutir cuestiones de su escritura y de la identificación de los distintos tipos de registros que se van usando? ¿Identificar los distintos tipos de registros, por parte de los estudiantes, ayudaría a la producción de los diferentes tipos de pruebas matemáticas? ¿Y a la construcción de sentido de esas ideas?

De igual modo, el trabajo sostenido en el aula de matemática con la escritura, ¿podría comenzar a borrar del imaginario de los estudiantes esas “magias” con las cuales la matemática parece estar dotada?

Quizás construir algunos instrumentos como la bitácora de trabajo por parte de los estudiantes o que el cuaderno se transformara en una bitácora, ¿podría fomentar el uso de la escritura en matemática con el fin de que la función epistémica del escribir sea considerada por los estudiantes, a la hora de aprender matemática?

# Bibliografía


**Arsac, G.** (1987). *El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica*. Recherche en Didactique des Matematiques. Vol 8, N° 3, pp. 267-312.

**Arsac, G.** et al. (1992). *Initiation au raisonnement déductif.* Press Universitaires de Lyon.

**Balacheff, N**. (2000). *Proceso de prueba en los alumnos de Matemática*. Universidad de los Andes. Bogotá. Una empresa docente.

**Brousseau, G**. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

**Carlino, P**. (2003a). *Pensamiento y lenguaje escrito en universidades estadounidenses y australianas*. Buenos Aires. Revista Propuesta Educativa. FLaCSo. Educación, N° 26.

**Carlino, P**. (2004a). *Escribir a través del currículum: Tres modelos para hacerlo en la universidad*. Lectura y vida. Revista Latinoamericana de lectura. Año 25 N°1, marzo 2004, pp.16-27, ISSN 0325-8637.

**Carlino, P**. (2004b). *El proceso de escritura académica: cuatro dificultades de la enseñanza universitaria*. Educere, Artículos arbitrados. Año 8, No 26, Julio Agosto- Setiembre, pp. 321- 327. ISSN: 1316-4910.

**Carlino, P**. (12 de junio de 2015). Leer y escribir en la secundaria y en la universidad. ¿Un problema o un asunto de todos?. Universidad CLAEH. Montevideo.

**Corbetta, P.** (2007). *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid. España. Mac Graw Hill.

**Charlot, B**. (1986). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Conferencia dictada en Cannes. [Consultado: agosto 2016]. Recuperado de http://www.ccgsm.gob.ar/areas/educacion/cepa/public_y_mat_mat.php

**Crippa, Chemello**. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En Adriana L. Díaz. (coord). *Enseñar Matemática en la escuela media*. (pp. 55-77). Buenos Aires. Editorial Biblos.

**Damisa, C. (2009).** Irineo Funes: La memoria absoluta o el sistema de numeración. En *Revista Superación*. Segunda época N° 3, pp.75-78.

**D´Amore, B. (2004).** Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Barcelona, España Uno. 35, 90-106.

**Duarte, B**. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática.* Tesis Doctoral. Buenos Aires. Universidad de San Andrés.

**Duval, R.** (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5 IREM, de Strasbourg. Traducción México, IPN, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

**Duval, R.** (1996). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Versión en español, México, Cinvestav.

**Duval, R.** (1999). *Argumentar, demsotrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

**Duval, R**. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. 9(1), pp.143-168.

**Duval, R**. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os regsitros de representacoes semió*ticas. Organizacao de Tania M.M. Campos. Traducao de Mariane Alves días. Sao Paulo: PROEM, 2011, 160p.

**Guber, R (2011)**. *La etnografía. Método, campo y reflexividad*. Buenos Aires. Siglo Veintiuno Editores. 2da reimpresión (2014).

**Hitt, F**. (2000). *Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas*. México. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

**Hunt y Ropo** (1995). Multi-level leadership: Groundedtheory and mainstream theory applied ti the case of general motors. *Leadership Quartterly*, 6(3), 379- 412. En pensamiento y Gestión. Universidad del Norte. N°39. ISSN1657-6276.

**Margolinas, C.** (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

**Morin, E**. (2007). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona. Gedisa editorial.

**Neira Sanabria, G**. (2013). *Representaciones, lenguaje, conversión, símbolos, semiótica, narrativas simbólicas,… ¿qué tiene que ver con la comprensión en matemáticas?* Bogotá. Universidad José Caldas,

**Panizza, M**. (2003). Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática. En Panizza, M. (Comp.). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas.* (pp. 31- 56). Buenos Aires. Paidós.

**Paniza, M**. (2005). *Razonar y conocer*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

**Rodriguez Rava, B; Arámburu, G.** (coords.). (2016). *El Hacer matemática en el aula. Un puente hacia la autonomía.* Montevideo. Fondo Editorial Queduca. FUM TEMP.

**Rojas, P**. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis Doctoral. Doctorado Interinstitucional en Educación. Facultad de Ciencias y Educación. Bogotá. Universidad Distrital Francisco José Caldas.

**Sadovsky, P**. (2005). *Enseñara Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

**Sadovsky, P.** (2015) - Otra Matemática es posible. Suplemento de *LE MONDE diplomatique, La educación en Debate*. No 29, p1. Buenos Aires.

**Salgado, A.** (2007). *Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológico y retos*. ISSN: 1729-4827. Lima- Perú.

**Sampieri, R, otros**. (2016). *Metodología de la Investigación*. México. Mac Graw Hill.

**Santaella, C**. (2006). *Criterios de Validez en la Investigación cualitativa actual*. Granada. Revista Investigación Educativa, vol. 24, n°1. (pp:147-164).

**Souto, M.** (2009). La clase escolar. Una mirada desde la didáctica de lo grupal. En Camillioni y otros. *Corrientes Didácticas Contemporáneas*. (pp. 117- 155). Buenos Aires. Paidós.

**Stake, R.** (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid. Segunda edición. Moratá.

# Apéndice

## Análisis didáctico a priori de la actividad

El análisis didáctico tanto de un contenido como de una actividad o serie de actividades es una herramienta docente muy eficaz. Puede cumplir diferentes funciones. En particular en este caso no es una actividad de enseñanza. La situación propuesta debía habilitar a recoger producciones escritas realizadas por los estudiantes magisteriales. Con los insumos recogidos, analizados e interpretados se pretendía responder: *¿Qué características tiene la escritura en Matemática de los estudiantes magisteriales al resolver actividades que exigen fundamentar?*

El diseño de esta actividad debía permitir la producción de escritura en matemática. Para poder analizar la potencialidad de la propuesta se realizó el análisis didáctico a priori poniendo el foco solamente en los posibles procedimientos de los estudiantes. El problema debía posibilitar el uso de distintos registros de representación con el fin de poder atrapar las transformaciones que se producían durante la escritura de las fundamentaciones.

### Situación matemática propuesta

El enunciado de la situación matemática propuesta a los estudiantes de los dos grupos, fue la siguiente:

> *Ana dice que siempre que suma tres números impares consecutivos el resultado es un número múltiplo de 3.*
>
> A) *¿Es verdadera la afirmación de Ana?*
>
> B) *Y si suma tres números pares consecutivos, ¿sucederá lo mismo?*
>
> *Fundamenta cada una de tus respuestas.*

## Análisis de los posibles procedimientos de resolución por parte de los estudiantes

### a. Procedimientos que involucran solo ejemplos numéricos

Para resolver la situación los estudiantes podrían utilizar ejemplos numéricos y responder, basándose en los mismos, sin producir pruebas intelectuales. Es decir, apoyarían su respuesta a partir de los ejemplos concretos sin poder dar el salto a una generalización fundada. Utilizarían quizás conocimientos en acto sobre idea de múltiplo de un número y algunas relaciones construidas a partir de esa idea. Por otro lado, podrían desconocer una de las reglas del debate matemático donde la ausencia de contraejemplos no habilita a la generalización.

En relación a la utilización de los registros de representación podrían utilizar escrituras aritméticas con números arábigos y signos matemáticos y lenguaje natural para establecer relaciones entre su exploración y las conclusiones a las que arriban.

A modo de ejemplo podría ser para la parte A):

*1+ 3+ 5 = 9 y 9 es múltiplo de 3*[13].

*11+13+15 = 39 y es múltiplo de 3.*

*Por lo tanto, lo que dice Ana es cierto.*

Para la parte B) funcionaría del mismo modo, analizando a través de algunos ejemplos que lo dicho por Ana para números consecutivos impares vale para consecutivos pares.

Obviamente la fundamentación que intentan esbozar no tiene validez en tanto que solo con ejemplos no se puede dar el valor de verdad de la proposición.

[13] Todo lo escrito en cursiva en esta sección ejemplifica la producción escrita de los estudiantes.

**b. Procedimientos que involucran ejemplos numéricos que funcionan como generalizaciones**

En este caso podría aparecer un procedimiento similar al anterior apoyándose sobre todo en ejemplos numéricos. Sin embargo, algunos estarían funcionando como casos genéricos donde el dominio en el que verifican si la suma de los números pedidos es o no múltiplos de 3 es mayor que los presentados en el punto anterior.

Por ejemplo:

*1+ 3+ 5 = 9 y 9 es múltiplo de 3.*

*11+13+15 = 39 y es múltiplo de 3.*

*Luego pruebo con números más grandes para ver si se verifica:*
*101+ 103+ 105 = 309. 309 es múltiplo de 3 porque al dividirlo por 3 da justo.*

Aparecería en este ejemplo un nuevo fundamento para justificar por qué la suma es múltiplo de 3. Utilizarían registros aritméticos y apoyo de lenguaje natural. Se evidencian intentos de comienzo de producciones de pruebas a través de los casos con dominio mayor y el recurso de poner una justificación de porqué sería la suma múltiplo de 3 apelando a la división entre 3 y mirando el resto.

Lo mismo podría suceder con la suma de los tres números pares consecutivos.

**c. Procedimientos que apelan a algunas escrituras con registro algebraico: Caso de pruebas intermedias**

c.1. Podrían surgir procedimientos donde se verifique con ejemplos numéricos para comenzar a explorar, luego usar dominio numérico mayor y pasar posteriormente a una escritura algebraica. En algunos casos esa escritura algebraica podría cumplir o no con las condiciones del problema. La producción de pruebas estaría utilizando registros de representación aritmético, algebraico y lenguaje natural.

A modo de ejemplo de este caso podría surgir:

*1+ 3+ 5 = 9 y 9 es múltiplo de 3.*

*11+13+15 = 39 y es múltiplo de 3.*

*Luego pruebo con números más grandes para ver si se verifica:*

*101+ 103+ 105 = 309. 309 es múltiplo de 3 porque al dividirlo por 3 da justo.*

*Entonces a, b y c serían números consecutivos impares y a+b + c es un múltiplo de 3.*

En la escritura se podría observar que no es suficiente decir que a, b y c son números consecutivos impares porque ella no está dando cuenta de esa condición. Por lo tanto, la escritura algebraica no refleja lo dicho en lenguaje natural y eso podría estar limitando a la generalización para producir una prueba intelectual.

Algo similar podría producirse para el trabajo con tres números pares consecutivos.

c.2. Por otro lado, bajo este mismo escenario algún estudiante podría producir algo más avanzado en término de ideas matemáticas, pero sin poder justificar totalmente lo que hace. Un posible caso podría ser:

*1+ 3+ 5 = 9 y 9 es múltiplo de 3.*

*11+13+15 = 39 y es múltiplo de 3.*

*Luego pruebo con números más grandes para ver si se verifica:*

*501+ 503+ 505 = 1509. Entonces1509 es múltiplo de 3 porque al dividirlo por 3 da justo, o porque la suma de sus cifras está en la tabla del 3.*

*Entonces (2a+1), (2a + 3), (2a + 5) serían números consecutivos impares y su suma es 6 a + 6, entonces sería múltiplo de 3.*

Aunque la última proposición no la justifique, hay un avance en la producción de como nombrar a los números impares utilizando registro algebraico.
Sería un caso de pruebas intermedias donde hay intentos en distintos registros de validar lo que se pide, aun cuando la justificación no sea en términos completos. Aparece el registro aritmético, algebraico y discursivo.

Una posible interpretación de este caso es que algunos estudiantes podrían dar por hecho que siempre pasa lo que dice Ana porque no han encontrado ningún contraejemplo y no ven aún la necesidad de producir una prueba de tipo intelectual.

En el caso de la parte B) se podría producir lo mismo o similar con tres números pares consecutivos.

### d. Producciones de pruebas intelectuales

Algunos estudiantes podrían apoyarse en la exploración de ejemplos para luego pasar directamente a una escritura algebraica utilizando lenguaje natural donde reflejaran las justificaciones necesarias de manera atemporal, con una escritura no personalizada y genérica, justificando cada paso realizado.

También, en otros casos dentro de esta misma categoría podría aparecer directamente la escritura algebraica sin necesidad de los ejemplos numéricos con las justificaciones correspondientes.

A modo de ejemplo de esa categoría:

A) *$(2a + 1) + (2a + 3) +(2a + 5) = 6a + 6$*
*$6a + 6 = 3\ (2a + 2)$, de donde la suma es múltiplo de 3 porque existe $(2a + 2)$, que es un número natural que multiplicado por 3 da como resultado esa suma. Definición de múltiplo de 3.*

Algo similar podría suceder en la parte B) de la situación matemática planteada.

**e. Producciones que combinen algunas de las anteriores.**

Como hipótesis podrían surgir por parte de algunos estudiantes producciones que combinen parte de algunos de los casos anteriores y seguramente otras que no se han contemplado.

**A modo de síntesis**

Se puede observar a través del análisis de los posibles procedimientos de los estudiantes que la situación diseñada promueve el uso de distintos tipos de registros de representación con el fin de que se escriture lo que se va pensando. También el problema habilitó a las distintos tipos de pruebas que pueden surgir durante la resolución de la situación matemática.